

**UNIVERSIDADE REGIONAL DO NOROESTE O ESTADO DO RIO GRANDE DO
SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA**

**CONTROLE ÓTIMO DO SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA:
LINEAR OU NÃO-LINEAR?**

Elaborada por

ANGELA BEATRIZ WEBER

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Ijuí-RS, Fevereiro de 2006

ANGELA BEATRIZ WEBER

**CONTROLE ÓTIMO DO SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA: LINEAR
OU NÃO-LINEAR?**

Dissertação apresentada ao Departamento de Física, Estatística e Matemática da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul - UNIJUÍ – (RS) como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática.

Ijuí-RS, Fevereiro de 2006

**UNIVERSIDADE REGIONAL DO NOROESTE O ESTADO DO RIO GRANDE DO
SUL**
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA

A Comissão Examinadora, abaixo assinada, aprova a Dissertação

**“CONTROLE ÓTIMO DO SISTEMA DE LOTKA-VOLTERRA: LINEAR
OU NÃO-LINEAR?”**

Elaborada por

ANGELA BEATRIZ WEBER

Como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Modelagem Matemática

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marat Rafikov – (Orientador) UNIJUI

Prof. Dr. Luiz Alberto Díaz Rodrigues - UFSM

Profª Drª Diomar Cristina Mistro - UFSM

Prof. Dr. Gerson Feldmann - UNIJUI

Ijuí-RS, 23 de Fevereiro de 2006

AGRADECIMENTOS

Agradeço especialmente ao meu orientador Marat Rafikov por seus ensinamentos e sua dedicação. Aos meus pais, Maria Helena e Valdemir, pelo carinho e o apoio incondicional e a minha avó pela ajuda nesta caminhada.

... a todos os colegas e amigos pela amizade compartilhada e em especial a Mônica, Minéia, Marilene e Gabriela, sempre presentes.

... ao Juliano pelo carinho e pela força nesta etapa final.

... a Deus, acima de tudo.

... a CAPES pelo apoio financeiro.

SUMÁRIO

Resumo	7
Abstract.....	8
Introdução	1
1. Controle de sistemas caóticos	4
1.1. Considerações Iniciais	4
1.1.1. Caos	5
1.1.2. Controle de sistemas.....	6
1.1.3. Controle do caos	7
1.1.4. Controle Feedback.....	8
1.2. Modelo de Lotka-Volterra de duas presas e um predador.....	9
2. Controle não-linear do modelo de Lotka-Volterra para n espécies.....	15
2.1. Estados de equilíbrio do sistema de Lotka-Volterra controlado.....	15
2.2. Formulação do problema do controle ótimo.....	17
2.3. Simulações.....	22
3. Controle linear do modelo de Lotka-Volterra para n espécies	27

3.1. Síntese do controle ótimo linear para sistemas não-lineares	27
3.2. Controle ótimo linear para o sistema de Lotka-Volterra de n espécies	29
3.3. Aplicação do controle ótimo linear para o sistema de Lotka-Volterra de duas presas e um predador.....	31
4. Controle ótimo não-linear conforme o Teorema de Krasovskii.....	36
4.1. Teorema de Krasovskii.....	36
4.2. Formulação do problema de controle ótimo.....	38
4.3. Simulações.....	39
5. Comparação entre o controle linear e os controles não-lineares.....	43
5.1. Determinação de uma base para comparação.....	43
5.2. Controle não-linear com a matriz Q_1	45
5.3. Controle linear com a matriz Q_1	47
5.4. Análise dos resultados	49
6. Controle ótimo aplicado em Agroecossistemas.....	50
6.1. Considerações sobre o Controle Biológico	50
6.2. Aplicação do controle para um sistema presa-predador.....	52
6.3. Aplicação do controle para o sistema duas presas e um predador.....	56
6.3.1. Aplicação do controle não-linear.....	58
6.3.2. Aplicação do controle linear.....	59
6.3.3. Aplicação do controle não linear conforme o Teorema de Krasovskii	60
Conclusão	63
Bibliografia.....	65

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver um método de controle não-linear feedback para o sistema de Lotka-Volterra generalizado de n espécies e comparar este método com os propostos pelos outros autores. O controle ótimo não-linear proposto neste trabalho foi comparado com o controle linear feedback e com o controle não-linear baseado no Teorema de Krasovskii. Esta comparação mostrou que existem possibilidades de usar estes tipos de controle para sistemas populacionais. Os três métodos foram aplicados para a resolução do problema de controle ótimo de pragas. Neste caso, o controle não-linear proposto mostrou-se mais eficiente.

ABSTRACT

The objective of this work is to develop a method of nonlinear feedback control for the Lotka-Volterra system of n species and to compare this method with methods, proposed by other authors. The nonlinear optimal control, proposed in this work, was compared with the linear feedback control and the nonlinear control based on the Krasovskii's Theorem. This comparison showed that there exist possibilities of the using of these control types for populations systems. The three methods were applied for the resolution of the optimal pest control problem. The comparison showed that the nonlinear feedback control, proposed in this work, was more efficient.

INTRODUÇÃO

"Caos freqüentemente produz vida, ordem produz habitat".

Henry Adams.

Muitas áreas do conhecimento têm se deparado com problemas que envolvem caos. Há muitos exemplos de exibição de regimes caóticos, tais como epidemias, falta de estabilidade econômica e financeira, atividade elétrica do cérebro, crescimento de tumores, interações entre populações de animais, reações químicas, circuitos elétricos, ritmo das batidas do coração, dentre outros.

Além disto, o comportamento caótico pode aparecer em varias ocasiões, às vezes de forma prejudicial, às vezes de forma útil. Classes inteiras de problemas que são de importância prática surgiram onde se tem a necessidade de controlar um sistema que apresenta um comportamento caótico.

Não se pode desconsiderar que a humanidade sempre se preocupou com o controle de populações, a ponto que todas consigam se desenvolver de forma equilibrada, não havendo falta de alimentos e moradia. O controle apresenta-se como uma forma de manipular a natureza para obter os efeitos desejados.

Mais de 3000 artigos científicos dedicados a várias aplicações de métodos para controle de sistemas caóticos foram publicados entre os anos de 1997 e 2005. Dentre estes trabalhos, na maior parte dos que se referem a aplicações, é demonstrado o uso do caos e dos métodos para controle de sistemas caóticos em problemas particulares, ou então, se mostra a viabilidade da aplicação dos referidos controles. Já nas aplicações científicas (em física,

química, ou biologia), o estudo é mais dirigido à teoria de controle e métodos para descobrir novas propriedades e regularidades no comportamento dos sistemas.

Destes, vários trabalhos como os de Bewley (1999), Sinha et al. (2000), Vincent e Yu (1991) utilizaram o controle linear feedback para estabilizar sistemas caóticos, mas nestes, o uso do controle linear para sistemas não-lineares não foi bem justificado. Uma metodologia para encontrar o controle ótimo linear feedback foi proposta em Rafikov e Balthazar (2003), onde foram encontradas as condições que garantem a aplicação do controle linear em sistemas não-lineares.

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver um método de controle não-linear feedback para o sistema de Lotka-Volterra generalizado de n espécies e comparar este método com os propostos pelos outros autores.

O primeiro capítulo apresenta uma colocação histórica dos sistemas caóticos, bem como dos tipos de controle, além da dinâmica do sistema de Lotka-Volterra.

No segundo capítulo é formulado e resolvido o problema do controle ótimo não-linear feedback para o sistema de Lotka-Volterra generalizado. Aplicando a Programação dinâmica, este problema foi reduzido à resolução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman que foi encontrada considerando uma família de funções de Lyapunov do sistema controlado.

No terceiro capítulo é resolvido o problema da síntese do controle linear para o sistema de Lotka-Volterra, aplicando a metodologia proposta por Rafikov e Baltazar (2003).

No quarto capítulo é considerado o controle não-linear do sistema de Lotka-Volterra, proposto por El-Gohary e Yassen (2001).

O quinto capítulo traz a comparação entre o controle linear desenvolvido no terceiro capítulo e os controles não-lineares do segundo e do quarto capítulo, respectivamente.

E por ultimo, no sexto capítulo são considerados os exemplos da aplicação dos controles considerados em um agroecossistema.

*“O caos revela que, em vez de resistir
às incertezas da vida, devemos aproveitá-las”*
Briggs

CAPÍTULO I

Controle de sistemas caóticos

1.1. Considerações Iniciais

“A complexidade dos fenômenos biológicos que poderia ser a causa do desinteresse da matematização desta ciência, ao contrário tem cada vez mais adeptos, mesmo porque a Biomatemática se tornou uma fonte fértil para o desenvolvimento da própria matemática”. (Bassanezi, 2002)

A proposta de descrever em forma de um modelo matemático o crescimento de uma população começou quando o economista T. R. Malthus em 1798, criou um modelo onde se observa um crescimento exponencial para a população. Outro modelo importante é do belga P. F. Verhulst de 1838, onde o crescimento da população sofre inibições, tendendo a um valor limite.

Porém o estudo de modelos populacionais só se tornaram mais conhecidos, conforme Meyer (1998), quando V. Volterra em 1926 e A. J. Lotka em 1925, analisando a interação entre duas espécies apresentaram um modelo que ficou conhecido como Modelo de Lotka-Volterra. Modelos do tipo Lotka-Volterra foram aplicados ao longo do tempo, a vários sistemas ecológicos, tais como problemas que envolvem economia, genética e reações químicas, dentre outros.

Alguns anos mais tarde surgiram a programação dinâmica, assim como muitas teorias e métodos para resolução de problemas de otimização. O principal pesquisador a estudar a programação dinâmica foi Richard Bellman, que na década de 50 desenvolveu vários trabalhos de pesquisa. Tais pesquisas se concentravam principalmente nos problemas

formulados na engenharia, na economia, nas ciências organizacionais e na área militar, cujas soluções necessitavam de novos processos metodológicos.

De acordo com Letov (1961), os métodos da programação dinâmica permitem a resolução de problemas de otimização, que podem ser utilizados como instrumentos de apoio na tomada de decisão.

1.1.1. Caos

Na mitologia antiga e filosofia, a palavra “caos” significava estado de desordem da matéria, supondo ter existido antes a ordem no universo. Já a definição de caos no sentido coloquial pode ser tumulto, turbulência ou desordem, mas do ponto de vista da Teoria do controle, o caos se conceitua como sendo algo extremamente sensível às condições iniciais. Caos também se refere à pergunta de se é ou não possível fazer boas previsões em longo prazo de como um sistema se comportará. As principais características de um sistema caótico são imprevisibilidade e forte dependência das condições iniciais.

Condições climáticas é exemplo de um sistema que apresenta caos. Outra observação a ser feita é que para fazer previsões de tempo a longo prazo seria necessário levar um número infinito de medidas, que no caso, seriam impossíveis de serem feitas. A presença de sistemas caóticos na natureza parece colocar um limite em nossa habilidade para aplicar as leis físicas determinísticas, para se prever movimentos com qualquer grau de certeza.

Um sistema caótico apresenta um comportamento imprevisível em longo prazo, devido à forte dependência com as condições iniciais. A constatação pioneira de movimentos caóticos em sistemas se deve a Lorenz (1963) que, trabalhando em um projeto para simular padrões de tempo em um computador, tropeçou acidentalmente no efeito de borboleta depois de divergências em cálculos que mudaram as suas simulações. O Efeito de Borboleta reflete como uma pequena mudança pode trazer grandes efeitos. É o exemplo clássico de caos, como mudanças pequenas conduzem a mudanças grandes. Um exemplo disto é como uma borboleta que agita suas asas em Hong Kong poderia mudar padrões de um tornado no Texas. Lorenz também descobriu o atrator de Lorenz, uma região que puxa pontos para si mesmo.

O estudo do caos determinístico pôde demonstrar a presença de ordem onde antes somente se tinha observado a aleatoriedade, a irregularidade e a imprevisibilidade. O

conhecimento do caos em um sistema permitiu uma visão padronizada do comportamento de um sistema dinâmico.

1.1.2. Controle de sistemas

A Modelagem Matemática quando aplicada ao controle biológico, permite a minimização dos custos e riscos ambientais e a realização de previsões. Em um contexto ecológico, segundo Meza et al. (2005), o termo controle é entendido como remoção/diminuição de uma certa espécie, tendo as seguintes características: implementação simplificada (expressão matemática mais simples possível); Não negatividade do controle; Monitoramento mínimo; Promoção de coexistência onde todas as espécies têm que alcançar um equilíbrio sustentável.

Os tipos de controle para sistemas não-lineares podem ser divididos em dois grupos levando em conta o contexto ecológico: O primeiro grupo se refere a técnicas já aplicadas a dinâmica da população. São várias as publicações sobre o controle de sistemas ecológicos não-lineares que se dedicaram ao estudo da vulnerabilidade de sistemas sujeitos a perturbações como mudanças das condições climáticas, doenças e migrações de espécies, Beddington (1977), Lee e Leitmann (1983), Steele e Henderson (1984) e Vicente et al. (1985) dentre outros. O segundo grupo agrupa técnicas não previamente aplicadas a dinâmica da população em questão. Um método novo para estabilizar um sistema é apresentado por Astolfi e Ortega (2003), onde são apresentadas funções de controle adaptáveis, não requerendo a utilização da função de Lyapunov.

A primeira formulação do problema de controle ótimo de um sistema populacional exibindo caos foi proposta no trabalho de Rafikov (2002). No trabalho Tusset e Rafikov (2004) foi encontrado o controle ótimo linear para sistemas presa-predador generalizados. Nos trabalhos de Rafikov e Balthazar (2003), Rafikov e Balthazar (2005) e Molter e Rafikov (2003) usou-se controle não-linear. No trabalho de Schmid e Rafikov (2004) foi usado o controle linear.

Para modelos presa-predador mais gerais, problemas de controle de populações foram formulados e resolvidos nos trabalhos de Rafikov e Maleico (2000), Sakr et al. (2001), Feltrin e Rafikov (2002) e Rafikov e Sakr (2002). Além dos trabalhos de Takeuchi et al. (1978) e Abmad (2005).

O trabalho de Boukal e Krivan (1999) analisou o comportamento de três sistemas de Lotka-Volterra diferenciados entre si, fazendo uso de funções de Lyapunov para descrever o controle ótimo. Já Pykh (2001) discute em seu artigo, a correspondência entre a estrutura da matriz de interação e as funções de Lyapunov.

Meza e Bhaya (2005) em seu trabalho usaram seis diferentes técnicas de controle aplicadas ao sistema de Lotka-Volterra, que é usado como padrão para avaliar e comparar estas técnicas em um contexto ecológico. O controle de sistemas do tipo Lotka-Volterra foi considerado também em El-Gohary e Yassen (2001), Zhang et al. (2003) e Leenher (2005).

Recentemente, houve um grande interesse na análise de bifurcação para o estudo da dinâmica da população, estudos preliminares deste tipo podem ser achados em Kuznetsov et al. (2003), Cunha et al. (2003) e Moreno et al. (2003).

1.1.3. Controle do caos

Na maior parte das vezes, o termo controle de caos é usado para denotar a área de estudos entre a teoria de controle e a teoria de sistemas dinâmicos que estudam os métodos de controle de sistemas com comportamento caótico.

Somente no final da década 60 é que surgiram as primeiras publicações sobre aplicações da teoria do controle ótimo, voltadas aos problemas agroecológicos. Na mesma época vários autores começaram a publicar os resultados semelhantes independentemente um de outro: Becker (1970), Clark (1971), Costa et al. (1992), Costa et al. (2003), Feltrin e Rafikov (2002). Outros problemas do controle ótimo de sistemas populacionais podem ser encontrados nas referências Barbashin (1970), Bassanezi (2002), Deng e Hines (2002), Debach, (1974), Freedman e Waltman (1977), Goh et al. (1974), Goh (1980).

Na teoria de controle existem dois tipos de controles: o controle de malha aberta onde a função de controle $u(t)$ é encontrada como uma função do tempo (nesse caso a função de controle ótimo determina uma trajetória ótima que corresponde a uma condição inicial dada) e o controle de malha fechada, em que a função de controle $u(t,x)$ depende do tempo e de variáveis de estado. Esse tipo de controle também é chamado *controle feedback* ou controle com realimentação e pode ser aplicado para qualquer condição inicial. Se as variáveis do sistema são desvios do regime desejado, o controle ótimo com realimentação

estabiliza o sistema em torno da trajetória desejada, minimizando o funcional que caracteriza os desvios quadrados da trajetória e do controle do regime desejado.

1.1.4. Controle Feedback

Controle feedback é um mecanismo básico pelo qual, sistemas mecânicos, elétricos, ou biológicos, mantêm seu equilíbrio. Um exemplo pode ser o controle da temperatura de um ambiente, medindo a temperatura ambiente real e comparando-a com a temperatura esperada, o termostato ativa ou desativa o equipamento de resfriamento ou aquecimento, de modo que a temperatura permaneça em um nível desejado, independente das condições. Em 1931 V. Volterra explicou o equilíbrio entre duas populações de peixes em um tanque, usando a teoria feedback.

Também pode ser definido como controle feedback, o uso de sinais de diferença, determinados pela comparação dos valores atuais das variáveis do sistema com os valores desejados, como um meio de controlar o sistema. Outro exemplo cotidiano de um sistema de controle feedback é o controle da velocidade de um automóvel, o qual usa a diferença da velocidade atual e a velocidade desejada para variar a taxa de fluxo de combustível.

Os principais fatos ao longo da história sobre a importância do uso do controle feedback foram:

1. A preocupação dos gregos e árabes em manter a precisão do tempo. Isto representa um período de aproximadamente 300 AC a aproximadamente 1200 DC.
2. A Revolução Industrial na Europa, com suas raízes localizadas em torno do ano de 1600.
3. O começo da comunicação em massa e a Primeira e Segunda guerra mundial. Isto representa o período entre 1910 a 1945 aproximadamente.
4. O começo da idade da computação em 1957.

Segundo Friedland (1986), nós podemos chamar o período de 1868 a 1900 de período primitivo do controle automático. É padrão chamar o período até 1960 de período clássico, e o período de 1960 até hoje de período moderno.

A motivação primária para controle feedback na antiguidade foi a necessidade de uma determinação precisa do tempo. Assim, em aproximadamente 270 DC o grego Ktesibios inventou um regulador flutuante para o relógio de água. A função deste regulador era manter o nível de água em um tanque a uma profundidade constante. Esta profundidade constante rendeu um fluxo constante de água por um tubo no fundo do tanque que encheu um segundo tanque a uma taxa constante. O nível de água no segundo tanque depende assim de ter decorrido um tempo certo.

O projeto de sistemas de controle feedback durante a Revolução Industrial era feito através de tentativa e erro, sendo mais uma arte do que uma ciência. Em 1800 meios matemáticos foram usados para analisar a estabilidade de sistemas com controle feedback.

O trabalho inicial na análise matemática de sistemas de controle trabalhava somente com equações diferenciais. J.C. Maxwell (1868) analisou a estabilidade do regulador centrífugo de Watt. Sua técnica foi linearizar as equações diferenciais de movimento para encontrar a equação característica do sistema. Ele estudou o efeito dos parâmetros do sistema na estabilidade e mostrou que o sistema é estável se as raízes da equação característica têm partes reais negativas. Com o trabalho de Maxwell podemos dizer que a teoria de sistemas de controle foi firmemente estabelecida.

E.J. Routh (1877) obteve uma técnica numérica para determinar quando uma equação característica tem raízes estáveis.

O russo I. I. Vishnegradsky (1877) analisou a estabilidade de reguladores que usam equações diferenciais independentemente de Maxwell. Mas foi o trabalho de A.M. Lyapunov (1893) que foi fundamental na teoria do controle. Ele estudou a estabilidade de equações diferenciais não lineares que usam uma noção generalizada de energia.

Os problemas do controle ótimo feedback de populações foram formulados e resolvidos nos trabalhos Forbes (1880), Gard (1980), Gilpin (1979), Holling (1959), Gause (1934), Costa et al. (2003), entre outros.

1.2. Modelo de Lotka-Volterra de duas presas e um predador

Muito tem se escrito e pesquisado sobre os modelos de Lotka-Volterra de competição e predação entre espécies, originando uma enorme quantidade de modelos alternativos. Entretanto os ecólogos costumam colocar fortes resistências sobre sua validade na natureza [Bassanezi (2002)].

Dentre os modelos de interações entre espécies está o modelo clássico de Lotka-Volterra para o sistema uma presa – um predador que pode ser estendido ao seguinte modelo de n espécies:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \quad i=1, \dots, n. \quad (1.1)$$

Este sistema foi chamado em Tak et al. (1978) de ecossistema generalizado do tipo Volterra. Vários artigos sobre estabilidade do ponto de equilíbrio não-negativo deste sistema foram publicados: May (1973), Takeuchi et al (1978a, 1978b), MacArthur (1970), Kilmer (1972), Aiken e Lapidus (1973), Goel (1971), entre outros.

Um caso particular do modelo (1.1) é o seguinte modelo de duas presas e um predador dado por

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right) \quad i=1,2,3. \quad (1.2)$$

As condições de estabilidade e de não-negatividade do sistema de Lotka-Volterra foram investigadas no trabalho de Zhang et al. (2003). Conforme este trabalho existem sete pontos de equilíbrio para o sistema de Lotka-Volterra de duas presas e um predador, sendo eles:

- Equilíbrio em que apenas uma espécie persiste:

$$1) \left(x_1^*, 0, 0 \right) = \left(\frac{r_1}{a_{11}}, 0, 0 \right).$$

$$2) \left(0, x_2^*, 0 \right) = \left(0, \frac{r_2}{a_{22}}, 0 \right).$$

- Equilíbrios nos quais duas espécies persistem:

$$3) (x_1^*, 0, x_3^*) = \left(\frac{r_1 - a_{11}r_3 - a_{31}r_1}{a_{11}a_{31}}, 0, \frac{a_{11}r_3 - a_{31}r_1}{a_{31}a_{13}} \right).$$

$$4) (0, x_2^*, x_3^*) = \left(0, \frac{r_2}{a_{22}} - \frac{a_{22}r_3 - a_{32}r_2}{a_{22}a_{32}}, \frac{a_{22}r_3 - a_{32}r_2}{a_{32}a_{23}} \right).$$

$$5) (x_1^*, x_2^*, 0) = \left(\frac{r_1 - a_{12}a_{11}r_2 + r_1a_{21}r_1}{a_{11}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}, \frac{a_{11}r_2 - a_{21}r_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, 0 \right).$$

- Equilíbrio no qual há persistência das três espécies:

$$6) (x_1^*, x_2^*, x_3^*).$$

$$x_1^* = \frac{(-a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22})r_3 - a_{13}a_{32}r_2 + a_{23}a_{32}r_1}{H},$$

$$x_2^* = \frac{(-a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23})r_3 - a_{31}a_{23}r_1 + a_{13}a_{31}r_2}{H},$$

$$x_3^* = \frac{(a_{22}a_{31} - a_{32}a_{21})r_1 + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{31})r_2 + (a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22})r_3}{H},$$

onde

$$H = a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{13}a_{32} - a_{31}a_{12}a_{23} + a_{31}a_{13}a_{22}.$$

- Ponto de equilíbrio trivial:

$$7) (0, 0, 0).$$

Para estudar a estabilidade do modelo, faz-se necessário estudar o comportamento das soluções na vizinhança do ponto de equilíbrio, pois se todas as soluções com condição inicial próximas aos pontos de equilíbrio se mantêm próximas, o ponto de equilíbrio é estável.

A estabilidade do modelo foi estudada através do cálculo dos autovalores. O sistema linearizado é assintoticamente estável quando as partes reais de todos os autovalores da matriz do sistema forem negativas.

As condições de existência e estabilidade para os pontos de equilíbrio não-negativos descritos anteriormente estão na Tabela 1.1.

Ponto de Equilíbrio	Condições de não-negatividade	Condições de Estabilidade
(x_1^*, x_2^*, x_3^*)	$x_1^* \geq 0, x_2^* \geq 0, x_3^* \geq 0$	$a_0 = x_1^* + x_2^* > 0$ $a_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1^*x_2^* + (a_{13}a_{31}x_1^* + a_{23}a_{32}x_2^*)x_3^* > 0$ $a_2 = x_1^*x_2^*x_3^*.H > 0$ $a_0a_1 - a_2 > 0$
$(x_1^*, 0, x_3^*)$	$a_{13} \geq r_3 / a_{31}r_1$	$(-a_{21}a_3 + a_{11}a_{23})r_3 - a_{31}a_{23}r_1 + a_{13}a_{31}r_2 < 0$
$(0, x_2^*, x_3^*)$	$a_{23} \geq r_3 / a_{32}r_2$	$(-a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22})r_3 - a_{13}a_{32}r_2 + a_{23}a_{32}r_1 < 0$
$(x_1^*, x_2^*, 0)$	$(r_1 - a_{12}r_2)(r_2 - a_{21}r_1) \geq 0$	$a_{12}a_{21} < 1$ $(a_{22}a_{31} - a_{32}a_{21})r_1 + (a_{11}a_2 - a_{21}a_{31})r_2 + (a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22})r_3 < 0$
$(0, x_2^*, 0)$	————	$a_{12} > r_1 / r_2, a_{23} < r_3 / a_{32}r_2$
$(x_1^*, 0, 0)$	————	$a_{21} > r_2 / r_1, a_{13} < r_3 / a_{31}r_1$
$(0, 0, 0)$	————	Instável

Tabela 1.1. Condições de existência e estabilidade para os pontos de equilíbrio.

Através das condições de existência, podemos verificar que se a presa x_2 está extinta e x_1 e x_3 interagem, a taxa total do predador não pode ser maior do que a taxa de morte dos mesmos, esta é a condição para a existência de $(x_1^*, 0, x_3^*)$. Da mesma forma, a condição para a existência de $(0, x_2^*, x_3^*)$. Já se o predador x_3 está extinto e há duas presas interagindo temos a condição $(r_1 - a_{12}r_2)(r_2 - a_{21}r_1) \geq 0$. Caso contrário uma das duas presas estará extinta.

Vale lembrar que no mundo real, a taxa de crescimento de uma espécie não se dá em função da densidade da população atual, mas depende de vários fatores, por isto a necessidade de um estudo detalhado do comportamento do sistema, conforme feito anteriormente.

Considerando agora o sistema (1.2), temos:

x_1 , x_2 e x_3 como sendo as densidades da primeira presa, segunda presa e predador, respectivamente;

a_{ij} são os coeficientes que representam a interação entre as espécies da população;

r_i a taxa de crescimento da população i .

De acordo com Vance (1978) e Gilpin (1979), o sistema apresenta comportamento caótico para os seguintes parâmetros:

$$r_1=r_2=1; r_3=-1; a_{11}=a_{12}=0,001; a_{22}=0,001; a_{21}=0,0015; a_{13}=0,01; a_{23}=0,001; a_{31}=-0,005; a_{32}=-0,0005; a_{33}=0.$$

A Figura 1.1 apresenta as trajetórias temporais caóticas deste sistema. A Figura 1.2 mostra o diagrama de fase do sistema para os parâmetros descritos.

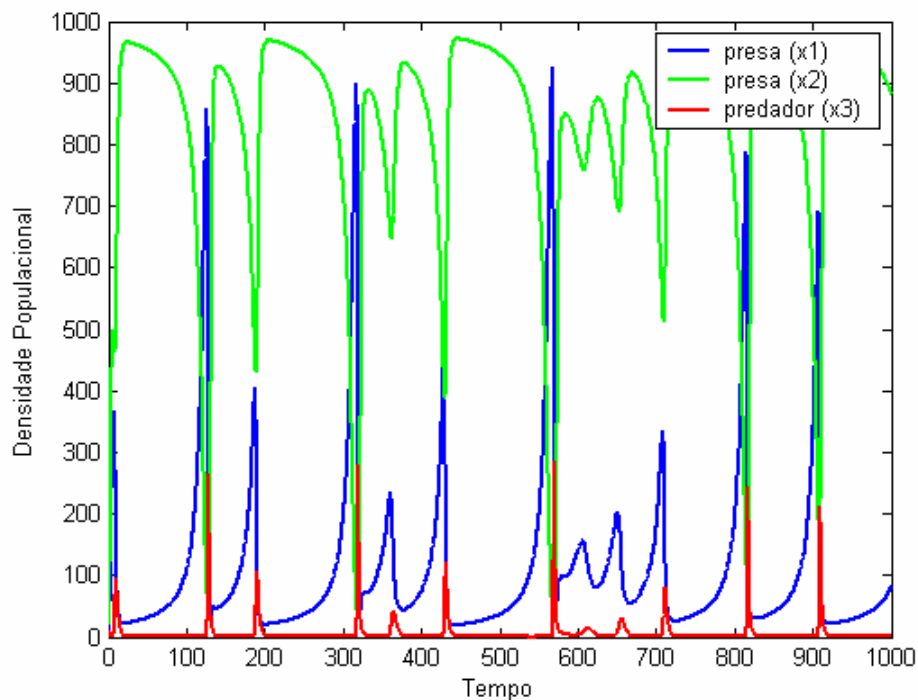


Figura 1.1. Trajetórias temporais caóticas do sistema Lotka-Volterra.

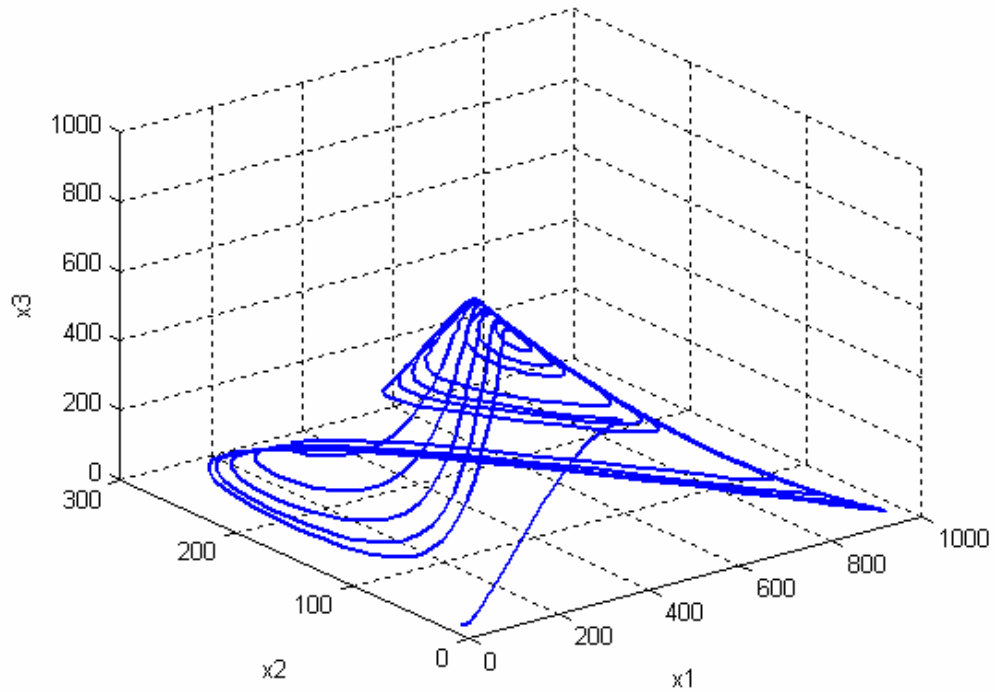


Figura 1.2. Diagrama de fase do sistema Lotka-Volterra com condição inicial (10;20;1)

Conforme pode-se visualizar na figura 1.1, as trajetórias nos modelos caóticos têm a forma de oscilações irregulares onde tanto a frequência quanto a amplitude variam ou “flutuam”.

CAPÍTULO II

Controle não-linear do modelo de Lotka-Volterra para n espécies

2.1. Estados de equilíbrio do sistema de Lotka-Volterra controlado

Considerando o modelo de Lotka-Volterra descrito por:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j) \quad i=1, \dots, n. \quad (2.1)$$

O sistema controlado tem a forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j) + F_i \quad i=1, \dots, n. \quad (2.2)$$

onde F_i , $i=1, \dots, n$ são funções de controle, que serão determinadas de condições que asseguram a estabilidade assintótica dos pontos de equilíbrio do modelo (2.2).

Considerando $F_i = U_i x_i$ na equação (2.2), teremos

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + U_i) \quad i=1, \dots, n.. \quad (2.3)$$

Os pontos de equilíbrio do modelo controlado (2.3) podem ser encontrados da resolução do seguinte problema:

$$\bar{x}_i(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}\bar{x}_j + \bar{U}_i) = 0 \quad i=1, \dots, n.. \quad (2.4)$$

Neste trabalho são considerados somente os pontos de equilíbrio positivos que podem ser encontrados do sistema:

$$r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j + \bar{U}_i = 0 \quad i=1, \dots, n. \quad (2.5)$$

onde \bar{x}_i e \bar{U}_i são variáveis do estado e funções de controle do estado de equilíbrio do sistema (2.4). A forma vetorial da equação (2.5) tem a seguinte forma:

$$A\bar{x} = B, \quad \text{onde} \quad B = \begin{bmatrix} r_1 + \bar{U}_1 \\ r_2 + \bar{U}_2 \\ \dots \\ r_n + \bar{U}_n \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

A equação (2.6) tem solução única se $\det(A) \neq 0$.

O controle \bar{U}_i determinado pelas equações (2.5) em Teoria do Controle chama-se feedforward.

O controle feedforward \bar{U}_i é calculado como:

$$\bar{U}_i = -r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{x}_j \quad i=1, \dots, n.. \quad (2.7)$$

O controle (2.7) sendo aplicado no sistema (2.3) em muitos casos não consegue manter o sistema (2.3) em equilíbrio. Para mostrá-lo consideraremos as condições de estabilidade do sistema linearizado correspondente a (2.3), conforme descrito no capítulo anterior.

Para estabilizar o sistema (2.3) num ponto de equilíbrio pode ser usado o controle feedback.

Considerando que as funções de controle em (2.3) consistem de duas partes

$$U_i = \bar{U}_i + u_{it} \quad i=1, \dots, n.. \quad (2.8)$$

onde a parte \bar{U}_i é o controle feedforward determinado por (2.7) e u_{it} é o controle feedback.

Substituindo (2.8) em (2.3) temos:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \bar{U}_i + u_i) \quad i=1, \dots, n. \quad (2.9)$$

2.2. Formulação do problema do controle ótimo

Para encontrar o vetor de controle u_i , podemos formular o seguinte problema de controle ótimo: Encontrar o vetor de controle u_i que transfere o sistema (2.9) do estado inicial ao estado final

$$x_i(\infty) = x_i^* \quad i=1, \dots, n.. \quad (2.10)$$

minimizando o seguinte funcional:

$$J = \int_0^{\infty} [y^T Q y + u^T M u] dt, \quad (2.11)$$

onde $y_i = x_i - \tilde{x}_i$, sendo \tilde{x}_i a trajetória desejada e a matriz Q devendo ser definida positiva.

Conforme proposto por Rafikov (2002), usa-se a técnica da Programação Dinâmica, onde o problema de controle ótimo acima formulado reduz-se à resolução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$\min_{u(t)} \left[\frac{dV}{dt} + W \right] = 0, \quad (2.12)$$

onde:

$$W = y^T Q y + u^T M u \quad \text{ou} \quad W = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} y_i y_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} u_i u_j. \quad (2.13)$$

A equação (2.12) é uma equação diferencial parcial não linear. A solução V desta equação deve satisfazer a condição final

$$V(\infty) = 0. \quad (2.14)$$

A resolução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman num caso geral é um problema bastante complicado. Existem vários trabalhos, como o de Bardi e Capuzzo-Dolcetta (1997), que tentam resolver este problema numericamente. Neste trabalho procuraremos a resolução da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman em forma analítica.

A função V procurada deve satisfazer a equação (2.12) e a condição final (2.14) e fornecer ao sistema (2.9) a estabilidade assintótica. A forma da função de Lyapunov para este sistema é:

$$V = \sum_{i=1}^n c_i \left(x_i - x_i^* - x_i^* \ln \left(\frac{x_i}{x_i^*} \right) \right), \quad (2.15)$$

sendo c_i constantes positivas.

A função de Lyapunov (2.15) deve ser definida positiva, conforme mostrado a seguir.

Como x_i , x_i^* e c_i são sempre positivos, temos V com mínimo global no ponto $x_i = x_i^*$. Considerando a condição necessária do extremo, temos:

$$\frac{dV}{dx} = \sum_{i=1}^n c_i \left(1 - x_i^* \cdot \frac{1}{\frac{x_i}{x_i^*}} \cdot \frac{1}{x_i} \right) = \sum_{i=1}^n c_i \left(1 - \frac{x_i^*}{x_i} \right) = 0. \quad (2.16)$$

Da condição suficiente do mínimo tem-se:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \sum_{i=1}^n c_i \cdot \frac{x_i^*}{x_i^2}. \quad (2.17)$$

(2.17) é sempre maior que zero, pois x_i e x_i^* são positivos, logo a função de Lyapunov (2.15) é definida positiva.

A derivada \dot{V} , calculada de (2.15) é dada por:

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n c_i \left(x_i - x_i^* \right) \cdot \frac{\dot{x}_i}{x_i}. \quad (2.18)$$

Considerando o sistema (2.9), temos:

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_i^*) \cdot \frac{\left(x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \bar{U}_i + u_{it} \right) \right)}{x_i}. \quad (2.19)$$

Substituindo \bar{U}_i

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_i^*) \cdot \left(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* + u_{it} \right). \quad (2.20)$$

Simplificando os termos, teremos:

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_i^*) \cdot \left(- \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_j - x_j^*) + u_{it} \right). \quad (2.21)$$

O vetor de controle u_{it} procurado tem a seguinte forma vetorial:

$$u_{it} = \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j. \quad (2.22)$$

Como $y_i = x_i - x_i^*$, substituindo (2.22) na equação (2.21) obtemos:

$$\dot{V} = - \sum_{i=1}^n c_i y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j \right). \quad (2.23)$$

A equação (2.23) pode ser reescrita na forma vetorial, na forma:

$$\dot{V} = -y^T \bar{A} y + y^T \bar{B} u, \quad (2.24)$$

onde

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} c_1 a_{11} & \cdots & c_1 a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n a_{n1} & \cdots & c_n a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} c_1 b_{11} & \cdots & c_1 b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n b_{n1} & \cdots & c_n b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Levando (2.13) e (2.21) em (2.12), a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman torna-se:

$$\min_{u(t)} \left[-y^T \bar{A}y + y^T \bar{B}u + y^T Qy + u^T Mu \right] = 0. \quad (2.25)$$

A função $u(t)$ não é limitada e pode ser encontrada da condição:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \left[-y^T \bar{A}y + y^T \bar{B}u + y^T Qy + u^T Mu \right] = 0. \quad (2.26)$$

Logo:

$$\bar{B}^T y + 2Mu = 0 \longrightarrow u = -\frac{1}{2} M^{-1} \bar{B}^T y. \quad (2.27)$$

Substituindo (2.27) em (2.25) e levando em conta que:

$$u^T = -\frac{1}{2} y^T \bar{B} (M^{-1})^T, \quad (2.28)$$

obtem-se:

$$-y^T \bar{A}y - \frac{1}{4} y^T \bar{B} M^{-1} \bar{B}^T y + y^T Qy = 0. \quad (2.29)$$

Colocando em evidência y^T e y , temos:

$$y^T \left[-\bar{A} - \frac{1}{4} \bar{B} M^{-1} \bar{B}^T + Q \right] y = 0. \quad (2.30)$$

A igualdade (2.30) é satisfeita para quaisquer valores de y , então:

$$Q = \bar{A} + \frac{1}{4} \bar{B} M^{-1} \bar{B}^T. \quad (2.31)$$

Aplicando o controle desenvolvido para o sistema de Lotka-Volterra de duas presas e um predador, temos as matrizes:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} c_1 a_{11} & c_1 a_{12} & c_1 a_{13} \\ c_2 a_{21} & c_2 a_{22} & c_2 a_{23} \\ c_3 a_{31} & c_3 a_{32} & c_3 a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \bar{B}^T = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 a_{11} & c_1 a_{12} & c_1 a_{13} \\ c_2 a_{21} & c_2 a_{22} & c_2 a_{23} \\ c_3 a_{31} & c_3 a_{32} & c_3 a_{33} \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} c_1^2/m_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2^2/m_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3^2/m_3 \end{bmatrix}.$$

Na teoria do controle geralmente a matriz Q é considerada simétrica. Para encontrar a expressão semelhante a (2.31) para Q simétrica introduzimos os coeficientes:

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{c_i a_{ij} + c_j a_{ji}}{2}. \quad (2.32)$$

Neste caso, teremos:

$$y^T \bar{A} y = y^T \tilde{A} y. \quad (2.33)$$

Considerando

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} c_1 a_{11} & \frac{c_1 a_{12} + c_2 a_{21}}{2} & \frac{c_1 a_{13} + c_3 a_{31}}{2} \\ \frac{c_2 a_{21} + c_1 a_{12}}{2} & c_2 a_{22} & \frac{c_2 a_{23} + c_3 a_{32}}{2} \\ \frac{c_3 a_{31} + c_1 a_{13}}{2} & \frac{c_3 a_{32} + c_2 a_{23}}{2} & c_3 a_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c_1 a_{11} & c_1 a_{12} & c_1 a_{13} \\ c_2 a_{21} & c_2 a_{22} & c_2 a_{23} \\ c_3 a_{31} & c_3 a_{32} & c_3 a_{33} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c_1 a_{11} & c_2 a_{21} & c_3 a_{31} \\ c_1 a_{12} & c_2 a_{22} & c_3 a_{32} \\ c_1 a_{13} & c_2 a_{23} & c_3 a_{33} \end{bmatrix},$$

chegamos a

$$\tilde{A} = \frac{1}{2} D_c A + \frac{1}{2} A^T D_c, \quad (2.34)$$

onde D_c é matriz diagonal com elementos c_i .

Levando (2.31) e (2.34) em (2.29), temos:

$$-y^T \left[\frac{1}{2} D_c A + \frac{1}{2} A^T D_c \right] y - \frac{1}{4} y^T D_c B M^{-1} B^T D_c y + y^T Q y = 0,$$

ou

$$y^T \left[-\frac{1}{2}(D_c A + A^T D_c) \right] y + y^T \left[-\frac{1}{4} D_c B M^{-1} B^T D_c \right] y + y^T Q y = 0,$$

ou ainda

$$y^T \left[-\frac{1}{2}(D_c A + A^T D_c) - \frac{1}{4} D_c B M^{-1} B^T D_c + Q \right] y = 0, \quad (2.35)$$

de onde segue:

$$Q = \frac{1}{2}(D_c A + A^T D_c) + \frac{1}{4} D_c B M^{-1} B^T D_c. \quad (2.36)$$

Assim:

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 a_{11} & \frac{c_1 a_{12} + c_2 a_{21}}{2} & \frac{c_1 a_{13} + c_3 a_{31}}{2} \\ \frac{c_2 a_{21} + c_1 a_{12}}{2} & c_2 a_{22} & \frac{c_2 a_{23} + c_3 a_{32}}{2} \\ \frac{c_3 a_{31} + c_1 a_{13}}{2} & \frac{c_3 a_{32} + c_2 a_{23}}{2} & c_3 a_{33} \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} c_1^2 / m_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2^2 / m_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3^2 / m_3 \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

De onde, deve-se levar em conta que a matriz Q tem que ser definida positiva.

2.3. Simulações

Para verificar os resultados teóricos da seção 2.2 foi considerado o sistema de duas presas e um predador. As relações entre os coeficientes c_i da função de Lyapunov (2.15) e os coeficientes de ponderação do funcional (2.11) são dadas por (2.36) ou (2.37).

Geralmente na teoria de controle ótimo para sistemas lineares, os valores das matrizes Q e M são dados e através da equação de Riccati, onde são encontrados os valores da

matriz de coeficientes da função de Lyapunov que no caso de sistemas lineares tem a forma quadrática.

Nos últimos anos apareceram trabalhos que consideram o problema inverso do controle ótimo quando os parâmetros de funções de controle são dados e, através da equação de Riccati, são determinados os coeficientes do funcional otimizado.

Nesta seção foi utilizada a idéia do controle inverso: alguns parâmetros foram escolhidos como no controle inverso e outros foram calculados da equação (2.37).

A matriz A para o sistema considerado tem a seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0,001 & 0,001 & 0,001 \\ 0,0015 & 0,001 & 0,001 \\ -0,005 & -0,0005 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Considerando $c_1 = c_2 = c_3 = 1$; $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, da equação (2.37) obtemos a matriz Q :

$$Q = \begin{bmatrix} 2,5010 & 0,0013 & 0,0025 \\ 0,0013 & 2,5010 & 0,0003 \\ 0,0025 & 0,0003 & 2,5000 \end{bmatrix}.$$

As funções de controle neste caso são:

$$\begin{aligned} u_1 &= 4 - 0,5x_1, \\ u_2 &= 5 - 0,5x_2, \\ u_3 &= 2 - 0,5x_3. \end{aligned} \tag{2.38}$$

As trajetórias temporais para o sistema controlado com condição inicial (10;20;1) estão na Figura 2.1. O ponto de equilíbrio escolhido foi (8,10,4).

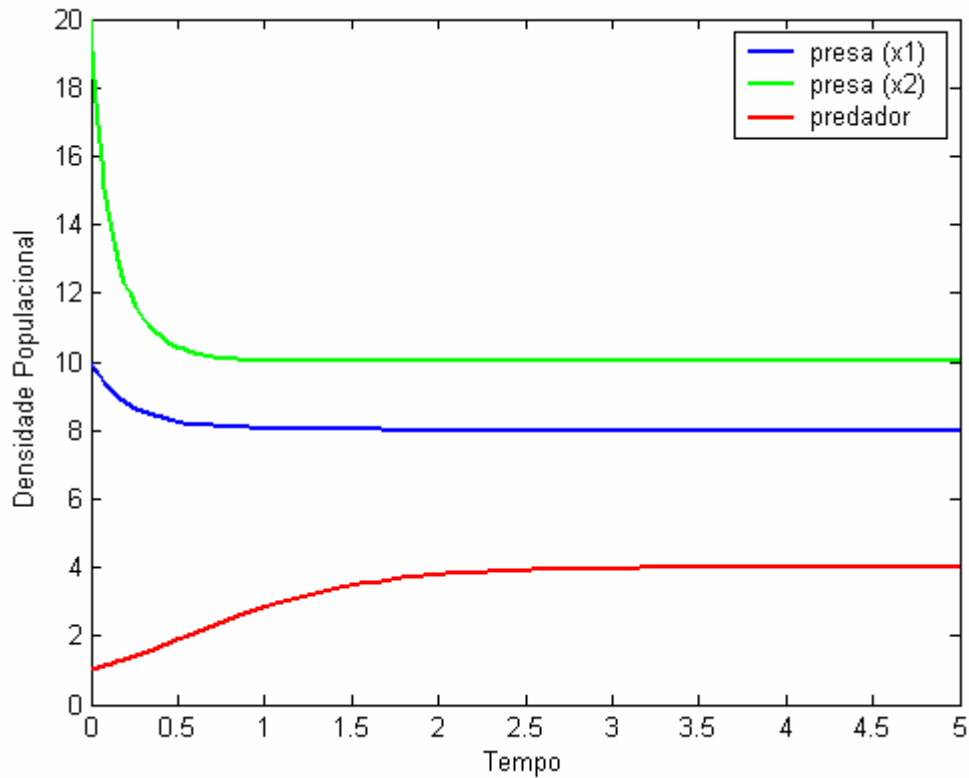


Figura 2.1. Trajetórias do sistema Lotka-Volterra com controle ótimo não-linear.

b) Considerando $c_1 = c_2 = c_3 = 1$; $m_1 = m_2 = m_3 = 2$, da equação (2.37) obtemos a matriz Q :

$$Q = \begin{bmatrix} 0,1260 & 0,0013 & 0,0012 \\ 0,0013 & 0,1260 & 0,0003 \\ 0,0012 & 0,0003 & 0,1250 \end{bmatrix}.$$

As funções de controle neste caso são:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 - 0,25x_1, \\ u_2 &= 2,5 - 0,25x_2, \\ u_3 &= 1 - 0,25x_3. \end{aligned} \tag{2.39}$$

A Figura 2.2 mostra a trajetória obtida para este caso, com a mesma condição inicial e ponto de equilíbrio utilizados na Figura 2.1.

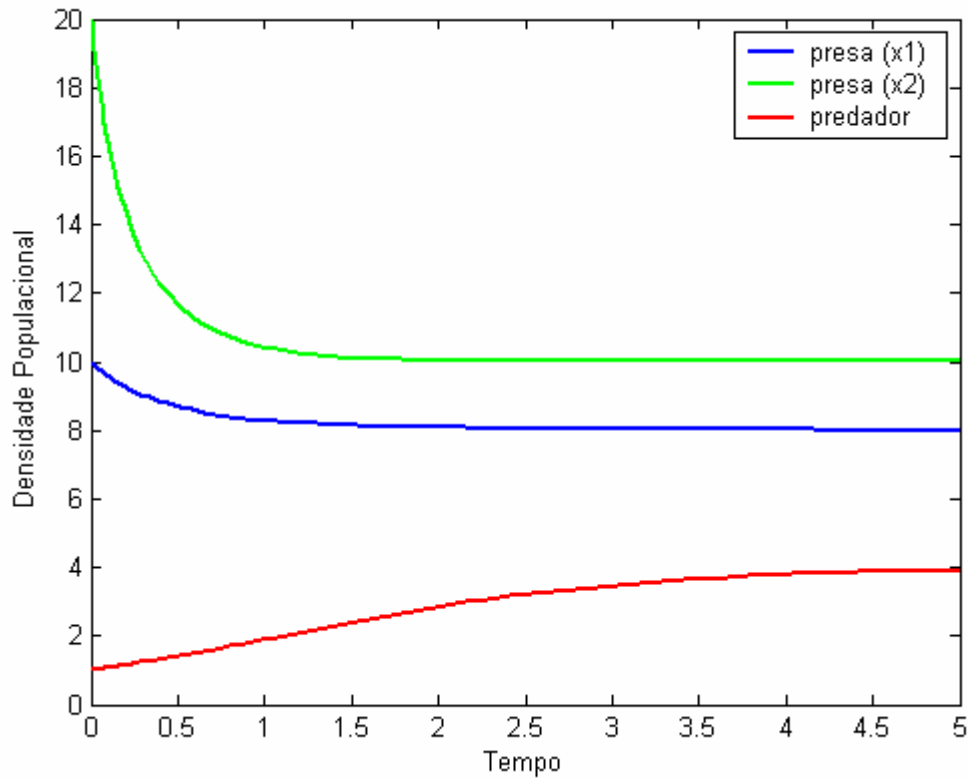


Figura 2.2. Trajetórias do sistema Lotka-Volterra com controle ótimo não-linear.

c) Considerando $c_1 = c_2 = c_3 = 1$; $m_1 = m_2 = 0,25025$ e $m_3 = 0,25$, da equação (2.37) obtemos a matriz Q :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0,0013 & 0,0025 \\ 0,0013 & 1 & 0,0003 \\ 0,0025 & 0,0003 & 1 \end{bmatrix}.$$

As funções de controle neste caso são:

$$\begin{aligned} u_1 &= 15,984 - 1,998x_1, \\ u_2 &= 19,980 - 1,998x_2, \\ u_3 &= 8 - 2x_3. \end{aligned} \tag{2.40}$$

As trajetórias temporais estão na Figura 2.3.

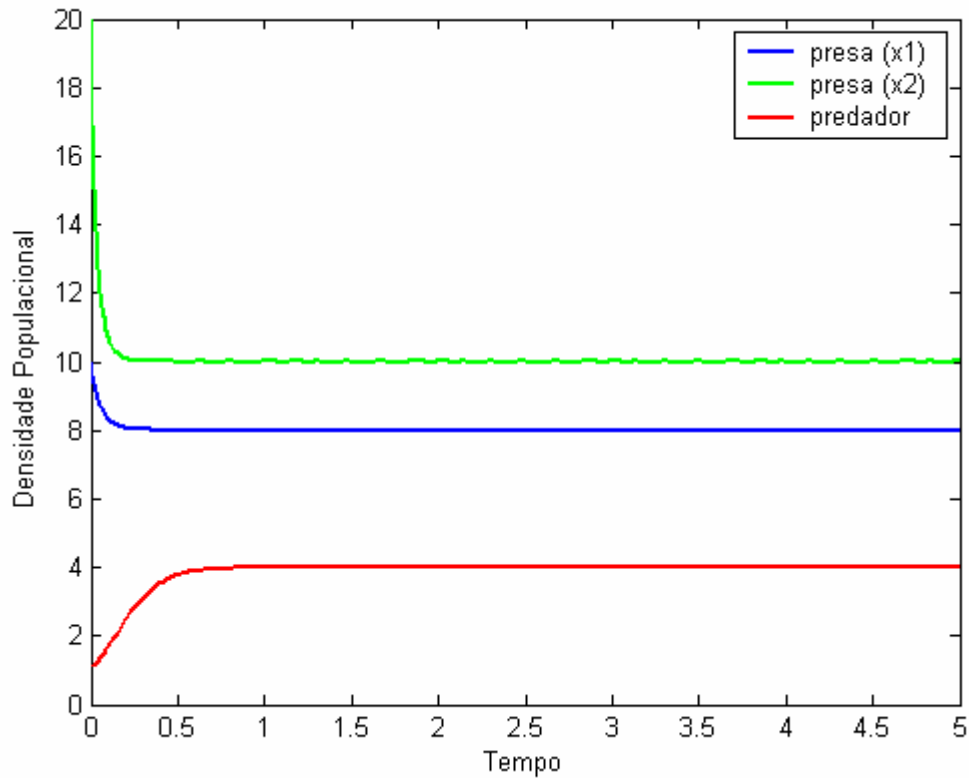


Figura 2.3 Trajetórias do sistema Lotka-Volterra com controle ótimo não-linear.

Como podemos verificar o caso *c*) apresentou melhores resultados, não somente por levar o sistema mais rapidamente ao ponto de equilíbrio escolhido, mas também por apresentar um menor valor para o funcional. Neste caso o valor do funcional é $J = 5,8286$.

Num caso geral, o sistema apresenta um grande grau de complexidade, lembrando aqui o chamado ‘problema de escolha de coeficientes de peso do funcional otimizado da teoria de controle ótimo’ Letov (1961). Para um problema clássico do controle ótimo os valores dos coeficientes c_i , m_i , q_i de um funcional quadrático são considerados dados Rafikov e Balthazar (2003). Alterando o valor de uma das incógnitas c_i , m_i , o valor do funcional otimizado e conseqüentemente as trajetórias alteram-se também. Quanto menores os valores atribuídos a m_i , melhores são os resultados obtidos, levando em conta, que a matriz Q tem que ser semidefinida positiva.

CAPÍTULO III

Controle linear do modelo de Lotka-Volterra para n espécies

3.1. Síntese do controle ótimo linear para sistemas não-lineares

A Síntese do controle ótimo linear para sistemas não lineares foi estudada por Rafikov e Balthazar (2004) e aplicada no trabalho de Schmid e Rafikov (2004) para o modelo de Lotka-Volterra.

Uma das dificuldades da metodologia acima referida é encontrar a forma adequada da matriz $G(x, \tilde{x})$. Neste capítulo é feita uma tentativa de evitar o uso desta matriz.

Sendo um sistema qualquer com comportamento caótico para determinados valores dos parâmetros:

$$\dot{x} = Ax + g(x), \quad (3.1)$$

onde $x \in \mathfrak{R}^n$ é um vetor de estado, $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é uma matriz constante e $g(x)$ um vetor.

O sistema controlado tem a forma (3.2)

$$\dot{x} = Ax + g(x) + U, \quad (3.2)$$

onde o vetor de controle tem a forma

$$U = \tilde{u} + u_t. \quad (3.3)$$

A parte \tilde{u} do vetor de controle que mantém o sistema controlado na trajetória desejada, sendo \tilde{x} a trajetória desejada, é descrito por

$$\tilde{u} = \dot{\tilde{x}} - A\tilde{x} - g(\tilde{x}). \quad (3.4)$$

Já a parte do vetor de controle u_t que estabiliza o sistema em torno da órbita desejada é descrito por

$$u_t = Bu, \quad (3.5)$$

onde $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ é uma matriz constante.

Definindo

$$y = x - \tilde{x}, \quad (3.6)$$

como o desvio da trajetória do sistema (3.2) da trajetória desejada, e admitindo (3.3)-(3.5), chegamos à equação em desvios (3.7):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + g(x) + \tilde{\dot{x}} - A\tilde{x} - g(\tilde{x}) + Bu \\ \dot{x} - \tilde{\dot{x}} &= A(x - \tilde{x}) + g(x) - g(\tilde{x}) + Bu \\ \dot{y} &= Ay + g(\tilde{x} + y) - g(\tilde{x}) + Bu. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Introduzimos a função

$$h(\tilde{x}, y) = g(\tilde{x} + y) - g(\tilde{x}), \quad (3.8)$$

a equação (3.7) torna-se

$$\dot{y} = Ay + h(\tilde{x}, y) + Bu. \quad (3.9)$$

Consideraremos o controle linear feedback:

$$u = -R^{-1}B^T P y, \quad (3.10)$$

onde a matriz $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é simétrica e satisfaz a seguinte equação algébrica não linear de Riccati:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0, \quad (3.11)$$

onde as matrizes $Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $R \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ são constantes, definidas positivas, cujos elementos são coeficientes de ponderabilidade do funcional

$$J = \int_0^{\infty} (y^T Q y + u^T R u) dt . \quad (3.12)$$

O objetivo desta seção é mostrar por um lado, que o controle linear feedback (3.10) pode transferir o sistema (3.9) de qualquer estado inicial ao ponto final

$$y(\infty) = 0 , \quad (3.13)$$

e por outro lado, encontrar o funcional minimizado neste caso, supondo que este funcional tem a seguinte forma

$$J = \int_0^{\infty} [l(y) + u^T R u] dt , \quad (3.14)$$

neste ponto, precisa-se encontrar a função $l(y)$.

Teorema: (Rafikov, Balthazar, 2005)

Se existem matrizes Q e R , positivas definidas, sendo Q simétrica, tais que a função

$$l(y) = y^T Q y - h^T(\tilde{x}, y) P y - y^T P h(\tilde{x}, y) , \quad (3.15)$$

é definida positiva, então o controle linear feedback (3.10) é ótimo a fim de transferir o sistema não-linear (3.9) de qualquer estado inicial ao estado final (3.13) minimizando o funcional (3.14).

3.2. Controle ótimo linear para o sistema de Lotka-Volterra de n espécies

O sistema de Lotka-Volterra de n espécies tem a seguinte forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) + U_i \quad i=1,2,\dots,n. \quad (3.16)$$

onde

$$U_i = \tilde{u}_i + u_i \quad i=1,2,\dots,n. \quad (3.17)$$

A parte \tilde{u} do vetor de controle que mantém o sistema na trajetória desejada pode ser encontrado como:

$$\tilde{u}_i = -\tilde{x}_i \left(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{x}_j \right) \quad i=1,2,\dots,n.. \quad (3.18)$$

Definindo

$$y_i = x_i - \tilde{x}_i, \quad (3.19)$$

como o desvio da trajetória do sistema (3.16) da trajetória desejada, e admitindo (3.18), obtém-se a equação em desvios:

$$\dot{y}_i = r_i y_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^n a_{ij} + \tilde{x}_i \tilde{x}_j + u_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.20)$$

Levando (3.19) em (3.20) chegamos:

$$\dot{y}_i = r_i y_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} (y_i y_j + \tilde{x}_i y_j + \tilde{x}_j y_i) + u_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.21)$$

Existem várias possibilidades de apresentar o sistema (3.21) na forma (3.9).

Por exemplo, se escolhermos

$$A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

então o vetor $h(\tilde{x}, y)$ de (3.9) tem a seguinte forma:

$$h(\tilde{x}, y) = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^n a_{1j}(y_1 y_j + \tilde{x}_1 y_j + \tilde{x}_j y_1) \\ \dots \\ -\sum_{j=1}^n a_{nj}(y_n y_j + \tilde{x}_n y_j + \tilde{x}_j y_n) \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Por outro lado, se escolher

$$A = \begin{bmatrix} r_1 - \sum_{j=1}^n a_{1j} \tilde{x}_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 - \sum_{j=1}^n a_{2j} \tilde{x}_j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_n - \sum_{j=1}^n a_{nj} \tilde{x}_j \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

então o vetor $h(\tilde{x}, y)$ tem a seguinte forma;

$$h(\tilde{x}, y) = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^n a_{1j}(y_1 y_j + \tilde{x}_1 y_j) \\ \dots \\ -\sum_{j=1}^n a_{nj}(y_n y_j + \tilde{x}_n y_j) \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Conforme o Teorema formulado na seção, o controle linear feedback (3.10) estabiliza o sistema Lotka-Volterra (3.21) em torno de 0, minimizando o funcional (3.14) com a função $l(y)$ dada por (3.15), onde o vetor $h(\tilde{x}, y)$ tem a forma (3.23), se a matriz A é considerada em forma (3.22) ou $h(\tilde{x}, y)$ tem forma (3.25), se a matriz A é considerada em forma (3.24).

3.3. Aplicação do controle ótimo linear para o sistema de Lotka-Volterra de duas presas e um predador

Seja \tilde{x} a trajetória desejada, então o sistema de Lotka-Volterra controlado de duas presas e um predador tem a forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(r_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j) + U_i \quad i=1,2. \quad (3.26)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_3(-r_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2) + U_3,$$

onde

$$U_i = \tilde{u}_i + u_i \quad i=1,2,3. \quad (3.27)$$

A parte \tilde{u} do vetor de controle mantém o sistema controlado na trajetória desejada, podendo ser escrito como

$$\tilde{u}_i = -\tilde{x}_i(r_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij}\tilde{x}_j) \quad i=1,2. \quad (3.28)$$

$$\tilde{u}_3 = -\tilde{x}_3(-r_3 + a_{31}\tilde{x}_1 + a_{32}\tilde{x}_2).$$

Definindo

$$y_i = x_i - \tilde{x}_i, \quad (3.29)$$

como o desvio da trajetória do sistema (3.26) da trajetória desejada, e admitindo (3.28)-(3.29), chegamos à equação em desvios:

$$\dot{y}_i = r_i y_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij}(y_i y_j + x_j y_i + \tilde{x}_i y_j) + u_i \quad i=1,2. \quad (3.30)$$

$$\dot{y}_3 = -r_3 y_3 + a_{31}(x_1 x_3 - \tilde{x}_1 \tilde{x}_3) + a_{32}(x_2 x_3 - \tilde{x}_2 \tilde{x}_3) + u_3.$$

Para encontrar o vetor de controle u no trabalho Schmid e Rafikov (2004) foi formulado o seguinte problema do controle ótimo: encontrar o controle ótimo u que transfere o sistema (3.30) de qualquer estado inicial ao ponto final

$$y(\infty) = 0, \quad (3.31)$$

minimizando o seguinte funcional:

$$\tilde{J} = \int_0^{\infty} (y^T \tilde{Q}y + u^T Ru) dt, \quad (3.32)$$

onde $y = \begin{bmatrix} x_1 - \tilde{x}_1 \\ x_2 - \tilde{x}_2 \\ x_3 - \tilde{x}_3 \end{bmatrix}$ e a matriz Q é semidefinida positiva.

O sistema Lotka-Volterra com desvios (3.30) foi reescrito na forma:

$$\dot{y} = Ay + G(x, \tilde{x})y + u, \quad (3.33)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} -a_{11}(x_1 + \tilde{x}_1) - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 & -a_{12}\tilde{x}_1 & -a_{13}\tilde{x}_1 \\ -a_{21}x_2 & -a_{22}(x_2 + \tilde{x}_2) - a_{21}\tilde{x}_1 - a_{23}x_3 & -a_{23}\tilde{x}_2 \\ -a_{31}x_3 & -a_{32}x_3 & -a_{33}(x_3 + \tilde{x}_3) - a_{31}\tilde{x}_1 - a_{32}\tilde{x}_2 \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Comparando este resultado com a fórmula (3.23) chegamos à igualdade:

$$h(\tilde{x}, y) = G(x, \tilde{x}). \quad (3.35)$$

Isto mostra que os dois enfoques são equivalentes.

O controle ótimo, para sistemas lineares é dado por (3.10), sendo a matriz $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ simétrica e satisfaz a seguinte equação algébrica não linear de Ricatti (3.11).

Escolhendo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obtemos através da função LQR do software MATLAB

$$P = \begin{bmatrix} 4.3166 & 0 & 0 \\ 0 & 4.3166 & 0 \\ 0 & 0 & 2.3166 \end{bmatrix}.$$

Assim, a função de controle (3.10) para este sistema tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_1 &= -4.3166(x_1 - \tilde{x}_1), \\ u_2 &= -4.3166(x_2 - \tilde{x}_2), \\ u_3 &= -2.3166(x_3 - \tilde{x}_3). \end{aligned} \quad (3.36)$$

A escolha da matriz Q é feita tendo em vista a estabilidade do sistema. A alteração da matriz Q para valores menores, neste caso, (mesmo resultando em valores menores para o funcional) influi na dinâmica do sistema controlado.

Através da Figura 3.1, pode-se verificar que os valores da função $h(\tilde{x}, y)$ permanecem positivos, isto significa que a matriz \tilde{Q} do funcional (3.32) é definida positiva, o que confirma o controle ser ótimo.

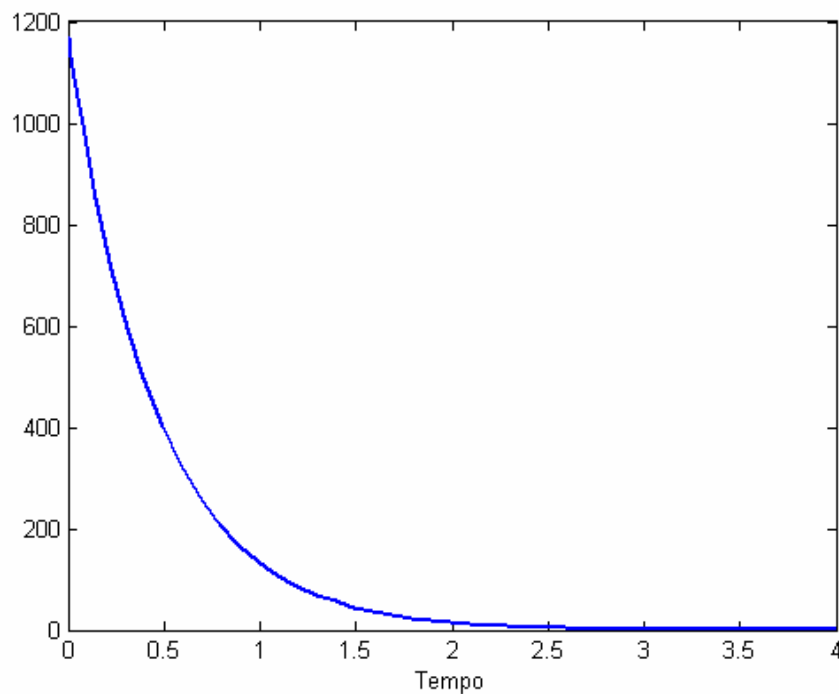


Figura 3.1. Valores da função $h(\tilde{x}, y)$.

As trajetórias do sistema controlado com controle ótimo linear (3.36) estão na Figura 3.2. As simulações foram realizadas com condições iniciais (10,20,1) e o ponto de equilíbrio escolhido foi (8,10,4).

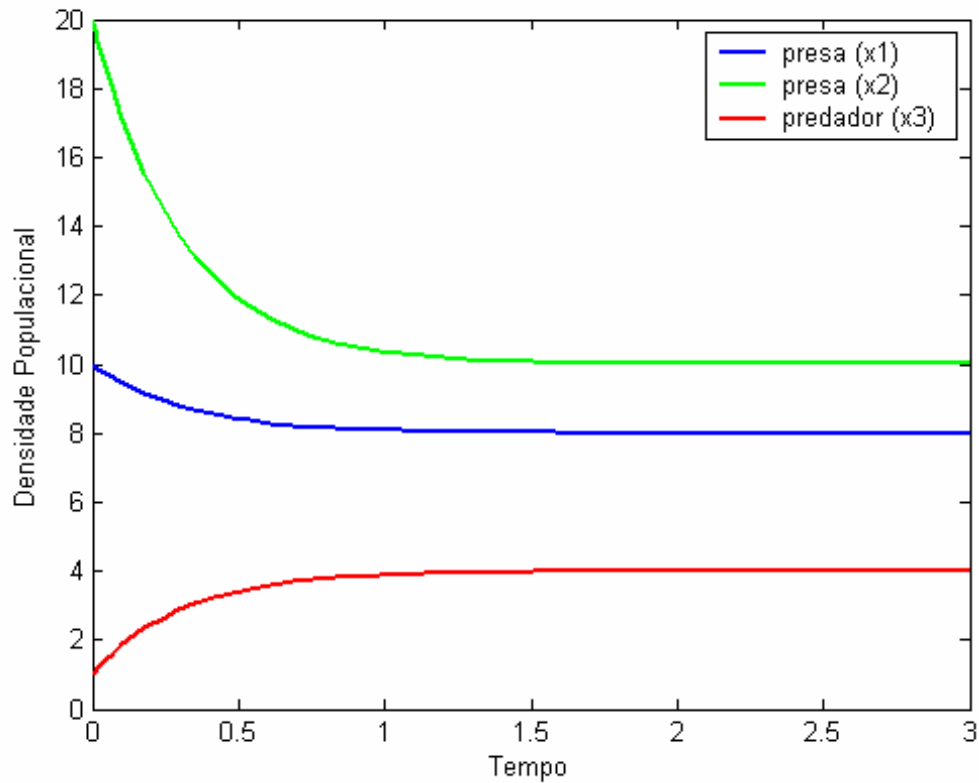


Figura 3.2. Trajetórias do sistema Lotka-Volterra com controle ótimo linear.

Temos que notar que a utilização da função vetorial $h(\tilde{x}, y)$ elimina a procura da estrutura da matriz $G(x, \tilde{x})$ (que é um procedimento complicado para sistema de ordem maior que 3). Por outro lado, o algoritmo de determinação do controle é semelhante ao do trabalho acima referido. No mesmo trabalho também foi mostrado que a escolha da matriz A quase não altera as trajetórias do sistema controlado de Lotka-Volterra.

CAPÍTULO IV

Controle ótimo não-linear conforme o Teorema de Krasovskii

4.1. Teorema de Krasovskii

No trabalho de El-Gohary e Yassen (2001) foi considerado o problema do controle ótimo do sistema Lotka-Volterra através do controle não-linear feedback baseado no Teorema de Krasovskii.

Seja \tilde{x} esta trajetória, então o sistema controlado tem a forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j) + U_i \quad i=1, \dots, n. \quad (4.1)$$

onde

$$U_i = \tilde{u}_i + u_i \quad i=1, \dots, n. \quad (4.2)$$

A parte \tilde{u} do vetor de controle mantém o sistema controlado na trajetória desejada, podendo ser escrito como

$$\tilde{u}_i = -\tilde{x}_i(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}\tilde{x}_j) \quad i=1, \dots, n. \quad (4.3)$$

Definindo

$$y_i = x_i - \tilde{x}_i, \quad (4.4)$$

como o desvio da trajetória do sistema (4.1) da trajetória desejada, e admitindo (4.2)-(4.4), obtém-se a equação em desvios:

$$\dot{y}_i = x_i(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j) + \tilde{u}_i + u_i \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.5)$$

Levando em conta o controle feedforward (4.3), tem-se

$$\dot{y}_i = x_i(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j) - \tilde{x}_i(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}\tilde{x}_j) + u_i \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.6)$$

Arranjando os termos, o sistema (4.6) pode ser escrito como:

$$\dot{y}_i = r_i(x_i - \tilde{x}_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_i x_j - \tilde{x}_i \tilde{x}_j) + u_i \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.7)$$

Aplicando (4.4) em (4.7), obtém-se:

$$\dot{y}_i = r_i(x_i - \tilde{x}_i) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_i x_j - \tilde{x}_i \tilde{x}_j) + u_i \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.8)$$

Para estabilizar o sistema (4.8), El-Gohary e Yassen (2001) utilizaram o Teorema de Krasovskii (1969). Conforme este Teorema a estabilidade assintótica do sistema (4.8) requer a minimização do funcional:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n \{K_i y_i^2 + \frac{1}{K_i} [u_i + r_i y_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}(y_i y_j + \tilde{x}_j y_i + \tilde{x}_i y_j)]^2\} dt, \quad (4.9)$$

e também que a expressão

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n y_i [u_i + r_i y_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}(y_i y_j + \tilde{x}_j y_i + \tilde{x}_i y_j)] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n K_i y_i^2 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2K_i} \left[u_i + r_i y_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}(y_i y_j + \tilde{x}_j y_i + \tilde{x}_i y_j) \right]^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

seja maior ou igual a 0.

Neste caso a função de Lyapunov é escolhida na forma:

$$2V = \sum_{i=1}^n y_i^2. \quad (4.11)$$

Supondo que a expressão (4.10) é igual a 0 quando as funções de controle são ótimas, El-Gohary e Yassen (2001) encontraram as funções de controle na seguinte forma:

$$u_i = -(K_i + r_i)y_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}(y_i y_j + \tilde{x}_j y_i + \tilde{x}_i y_j) \quad i = 1 \dots n. \quad (4.12)$$

4.2. Formulação do problema de controle ótimo

Para mostrar que a proposição de El-Gohary e Yassen (2001) é correta formularemos o seguinte problema do controle ótimo u que transfere o sistema (4.6) de qualquer estado inicial ao ponto final

$$y(\infty) = 0, \quad (4.13)$$

minimizando o seguinte funcional:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n \{K_i y_i^2 + \frac{1}{K_i} [u_i + r_i y_i + \sum_{j=1}^n a_{ij}(y_i y_j + \tilde{x}_j y_i + \tilde{x}_i y_j)]^2\} dt. \quad (4.14)$$

A função de Lyapunov escolhida é:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i^2. \quad (4.15)$$

A derivada da função de Lyapunov é:

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n y_i \dot{y}_i. \quad (4.16)$$

Substituindo (4.8) em (4.16), encontramos o valor da derivada das trajetórias do sistema (4.8):

$$\dot{V} = \sum_{j=1}^n y_j [r_j y_j - \sum_{i=1}^n a_{ij}(y_i y_j + \tilde{x}_j y_i + \tilde{x}_i y_j) + u_j] \quad i = 1 \dots n. \quad (4.17)$$

A equação de Hamilton – Jacobi – Bellman para o problema tem a seguinte forma:

$$\min_{u(t)} \left[\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i [r_i y_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} (y_i y_j + \tilde{x}_j y_i + \tilde{x}_i y_j) + u_i] \right] = 0. \quad (4.18)$$

A função $u(t)$ não é limitada e pode ser encontrada da condição:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \left[\frac{dV}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i [r_i y_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} (y_i y_j + \tilde{x}_j y_i + \tilde{x}_i y_j) + u_i] \right] = 0, \quad (4.19)$$

De (4.19) segue:

$$\frac{\partial}{\partial u_i} = y_i + \frac{1}{K_i} [r_i y_i^2 - \sum_{j=1}^n a_{ij} (y_i y_j + \tilde{x}_j y_i + \tilde{x}_i y_j) + u_i] = 0. \quad (4.20)$$

De onde:

$$u_i = -(K_i + r_i) y_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} (y_i y_j + \tilde{x}_j y_i + \tilde{x}_i y_j) \quad i = 1, 2. \quad (4.21)$$

Então o controle (4.21) é ótimo e é o mesmo de El-Gohary e Yassen conforme (4.12). Levando (4.21) em (4.17) temos:

$$\dot{V} = -\sum_{i=1}^n K_i y_i^2, \quad (4.22)$$

o que significa que o sistema (4.8) é assintoticamente estável.

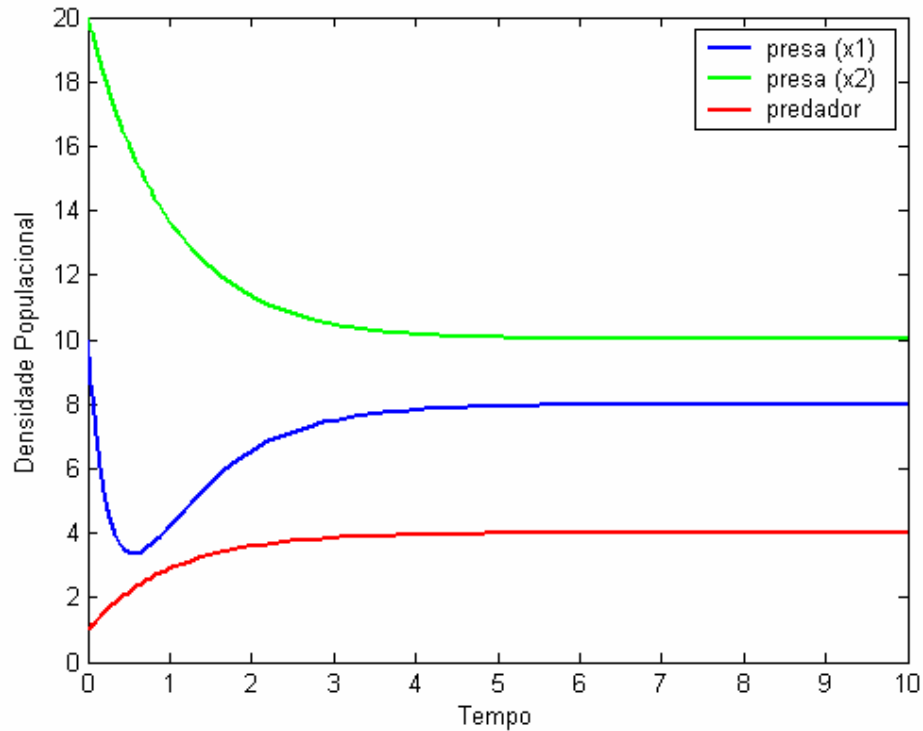
4.3. Simulações

Para o sistema de Lotka-Volterra de duas presas e um predador, as funções de controle ótimo têm a seguinte forma:

$$u_i = (K_i + r_i) y_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij} (y_i y_j + \tilde{x}_j y_i + \tilde{x}_i y_j) \quad i = 1, 2.$$

$$u_3 = (K_3 - r_3) y_3 + a_{31} (x_1 x_3 - \tilde{x}_1 \tilde{x}_3) + a_{32} (x_2 x_3 - \tilde{x}_2 \tilde{x}_3). \quad (4.23)$$

As trajetórias do sistema controlado com controle ótimo não-linear (4.23) estão na Figura 4.1. As simulações foram realizadas com as condições iniciais (10, 20,1) e o ponto de equilíbrio escolhido foi (8,10,4). O valor escolhido para o coeficiente k_i , foi $K_1 = K_2 = K_3 = 1$.



Figura

4.1. Trajetórias do sistema Lotka-Volterra com controle ótimo não-linear $k_i = 1$.

A fim de revelar a influência do valor do coeficiente k_i foram feitas simulações, alterando o valor de k_i .

As trajetórias do sistema Lotka-Volterra com controle ótimo (4.23) e valores de coeficientes $k_i = 0,5$ e $k_i = 2$ estão na Figuras 4.2 e 4.3, respectivamente.

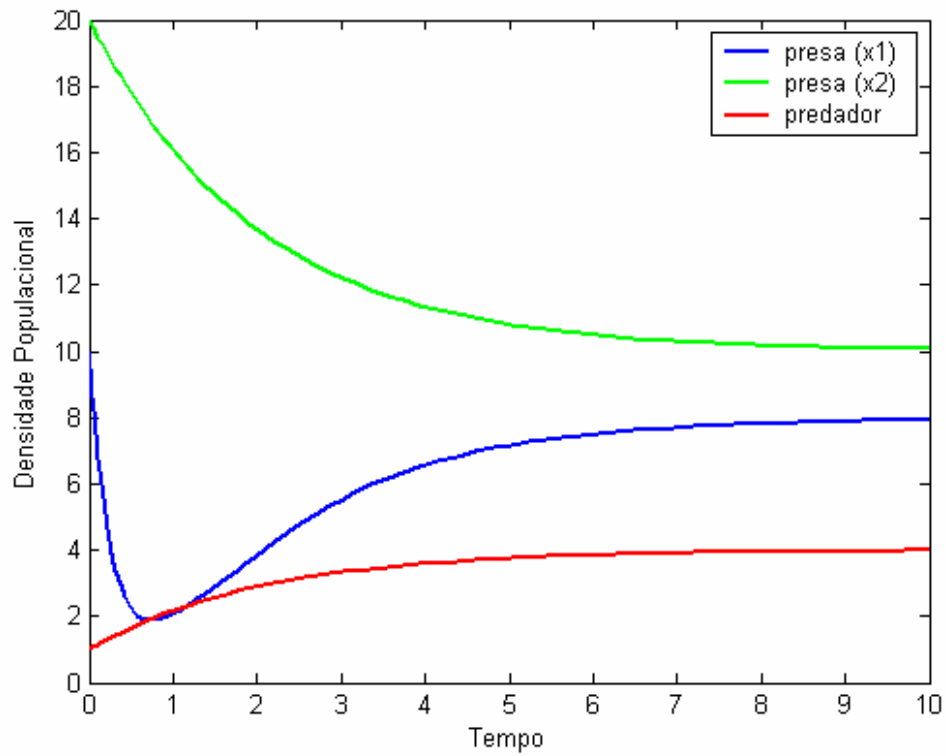


Figura 4.2. Trajetórias do sistema Lotka-Volterra com controle ótimo não-linear $k_i = 0,5$.

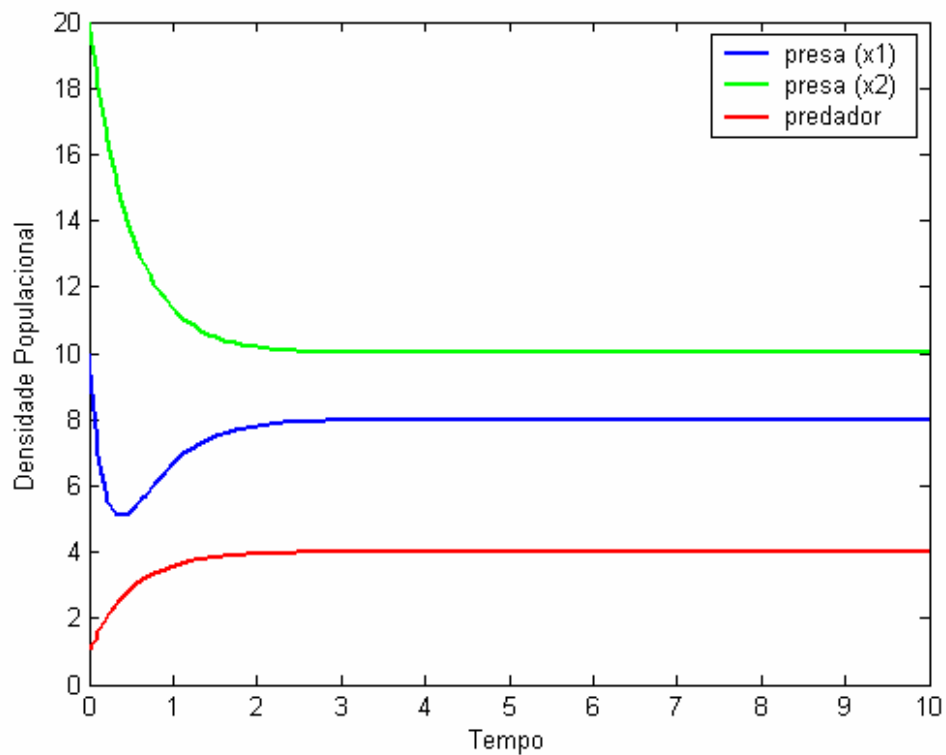


Figura 4.3. Trajetórias do sistema Lotka-Volterra com controle ótimo não-linear $k_i = 2$.

Para valores muito pequenos atribuídos a k_i , mais tempo é necessário para as trajetórias se estabilizarem em torno do ponto de equilíbrio, mas por outro lado, pode-se notar pouca diferença para valores atribuídos maiores do que 2. No trabalho El-Gohary e Yassen (2001) o valor escolhido foi 1, o mesmo utilizado na Figura 4.1.

Comparando as trajetórias nas Figuras 2.1, 3.2 e 4.3 são visto que existe uma diferença considerável no controle da primeira presa. Para o controle linear feedback (Figura 3.2) o controle leva a diminuição da população até chegar ao nível desejado da população da primeira presa. No controle não-linear (Figura 4.3), a população da primeira presa no início cai até um valor menor do nível desejado, e logo depois a população da primeira presa começa a crescer aproximando-se do nível desejado. Por outro lado, as simulações feitas mostraram que o valor do funcional para o controle linear foi de 2160,6. E o controle não-linear proposto por El-Gohary e Yassen (2001) apresentou um valor de 225,5. Isto ainda não significa que o controle não-linear é melhor para controle de populações neste caso. A escolha do tipo de controle depende da natureza do problema em consideração. Por exemplo, a interpretação do controle não-linear (Capítulo 4) para o controle de pragas leva a um resultado contraditório, ou seja, o controle ótimo para a primeira praga que inicialmente diminui a população, em um segundo momento exige a introdução deste tipo de praga, o que contradiz o conceito do controle de pragas. Então, neste caso o controle linear é melhor.

CAPÍTULO V

Comparação entre o controle linear e os controles não-lineares

O nosso objetivo neste capítulo é o de fazer uma comparação entre o controle linear (Capítulo 3) e o controle não-linear (Capítulo 2), mas para tanto precisamos de uma base para esta comparação.

Uma dificuldade principal na comparação do controle não-linear, descrito no Capítulo 2, e o controle linear, descrito no Capítulo 3, está nos valores dos coeficientes de ponderação do funcional otimizado, ou seja, estes valores não são iguais. A metodologia usada para o controle linear não permite esta igualdade, pois os elementos da matriz \bar{Q} são variáveis, ou seja, dependem de variáveis de fase. Por isso, a matriz \bar{Q} pode ser considerada igual à matriz Q do Capítulo 2 somente no ponto de equilíbrio.

5.1. Determinação de uma base para comparação

Conforme o teorema, formulado por Rafikov & Balthazar (2004), para o controle linear existe a seguinte igualdade:

$$\bar{Q} = Q_1 - G^T(x, \tilde{x})P - PG(x, \tilde{x}), \quad (5.1)$$

onde designamos Q_1 para distinguir da matriz Q do Capítulo 2.

Considerando o ponto em que $x = \tilde{x}$, temos:

$$\bar{Q} = Q_1 - G^T(\tilde{x}, \tilde{x})P - PG(\tilde{x}, \tilde{x}). \quad (5.2)$$

Desta forma a matriz $G(\tilde{x}, \tilde{x})$ torna-se constante

$$\bar{Q} = Q_1 - G^T P - P G. \quad (5.3)$$

E a matriz Q_1 pode ser encontrada através da igualdade abaixo

$$Q_1 = G^T P + P G + \bar{Q}. \quad (5.4)$$

Levando (4.4) na equação algébrica de Riccati dada abaixo:

$$P A + A^T P - P B R^{-1} B^T P + Q = 0. \quad (5.5)$$

Temos:

$$P A + A^T P - P B R^{-1} B^T P + \bar{G}^T P + P \bar{G} + \bar{Q} = 0, \quad (5.6)$$

ou

$$P(A + \bar{G}) + (A^T + \bar{G}^T)P - P B R^{-1} B^T P + \bar{Q} = 0. \quad (5.7)$$

A matriz P é calculada pela equação algébrica de Riccati dada na forma (5.7), através da função LQR do software MATLAB:

Onde, consideram-se as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz G considerada no controle linear (3.21), para o ponto em que $x = \tilde{x}$, é dada por:

$$G = \begin{bmatrix} -2a_{11}\tilde{x}_1 - a_{12}\tilde{x}_2 - a_{13}\tilde{x}_3 & -a_{12}\tilde{x}_1 & -a_{13}\tilde{x}_1 \\ -a_{21}\tilde{x}_2 & -2a_{22}\tilde{x}_2 - a_{21}\tilde{x}_1 - a_{23}\tilde{x}_3 & -a_{23}\tilde{x}_2 \\ -a_{31}\tilde{x}_3 & -a_{32}\tilde{x}_3 & -2a_{33}\tilde{x}_3 - a_{31}\tilde{x}_1 - a_{32}\tilde{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Substituindo o ponto de equilíbrio $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = (8, 10, 4)$ utilizado anteriormente, a matriz G torna-se

$$G = \begin{bmatrix} -0,0660 & -0,008 & -0,08 \\ -0,0150 & -0,036 & -0,01 \\ 0,0200 & 0,002 & 0,045 \end{bmatrix}.$$

A matriz \bar{Q} considerada foi:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0,0025 & 0,0025 \\ 0,0025 & 1 & 0 \\ 0,0025 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, obtém-se a matriz P , dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 2,3001 & -0,0189 & -0,0628 \\ -0,0189 & 2,3529 & -0,0079 \\ -0,0628 & -0,0079 & 0,4300 \end{bmatrix}.$$

Encontrada a matriz P , obtemos a matriz Q_1 procurada, através da equação (5.4) mostrada a seguir, sendo:

$$Q_1 = G^T P + P G + \bar{Q}$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0,6944 & -0,0496 & -0,1713 \\ -0,0496 & 0,8309 & -0,0207 \\ -0,1713 & -0,0207 & 1,0489 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Esta matriz Q_1 , conforme a teoria do controle ótimo, deve ser simétrica e definida positiva.

5.2. Controle não-linear com a matriz Q_1

Utilizando os resultados obtidos para o controle não-linear descrito no Capítulo 2, temos o modelo de Lotka-Volterra controlado com a forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \tilde{u}_i + u_i \right) \quad i=1, \dots, n.. \quad (5.9)$$

onde

$$\tilde{u}_i = r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{x}_j \quad i=1, \dots, n. \quad (5.10)$$

E o controle ótimo que é dado por

$$u = -\frac{1}{2} M^{-1} \bar{B}^T y. \quad (5.11)$$

De onde tem-se:

$$Q_1 = \bar{A} + \frac{1}{4} \bar{B} M^{-1} \bar{B}^T. \quad (5.12)$$

Considerando a matriz Q_1 obtida em (5.8) e as matrizes:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} c_1 a_{11} & c_1 a_{12} & c_1 a_{13} \\ c_2 a_{21} & c_2 a_{22} & c_2 a_{23} \\ c_3 a_{31} & c_3 a_{32} & c_3 a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,001c_1 & 0,001c_1 & 0,01c_1 \\ 0,0015c_2 & 0,001c_2 & 0,001c_2 \\ -0,005c_3 & -0,0005c_3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{B} = \bar{B}^T = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Temos:

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,001c_1 & 0,001c_1 & 0,01c_1 \\ 0,0015c_2 & 0,001c_2 & 0,001c_2 \\ -0,005c_3 & -0,0005c_3 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} c_1^2/m_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2^2/m_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3^2/m_3 \end{bmatrix},$$

ou

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,001c_1 + \frac{c_1^2}{4m_1} & 0,001c_1 & 0,01c_1 \\ 0,0015c_2 & 0,001c_2 + \frac{c_2^2}{4m_2} & 0,001c_2 \\ -0,005c_3 & -0,0005c_3 & \frac{c_3^2}{4m_3} \end{bmatrix}.$$

Considerando ainda $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, encontramos $m_1 = 0,36211$, $m_2 = 0,30124$ e $m_3 = 0,23834$.

O controle ótimo conforme (5.11), neste caso é dado por:

$$\begin{aligned} u_1 &= 11,0464 - 1,3808x_1, \\ u_2 &= 16,5981 - 1,6598x_2, \\ u_3 &= 8,3914 - 2,0978x_3. \end{aligned} \quad (5.13)$$

A trajetória da solução para o controle considerado está na figura 5.1. As simulações foram realizadas com condições iniciais (10,20,1) e o ponto de equilíbrio (8,10,4):

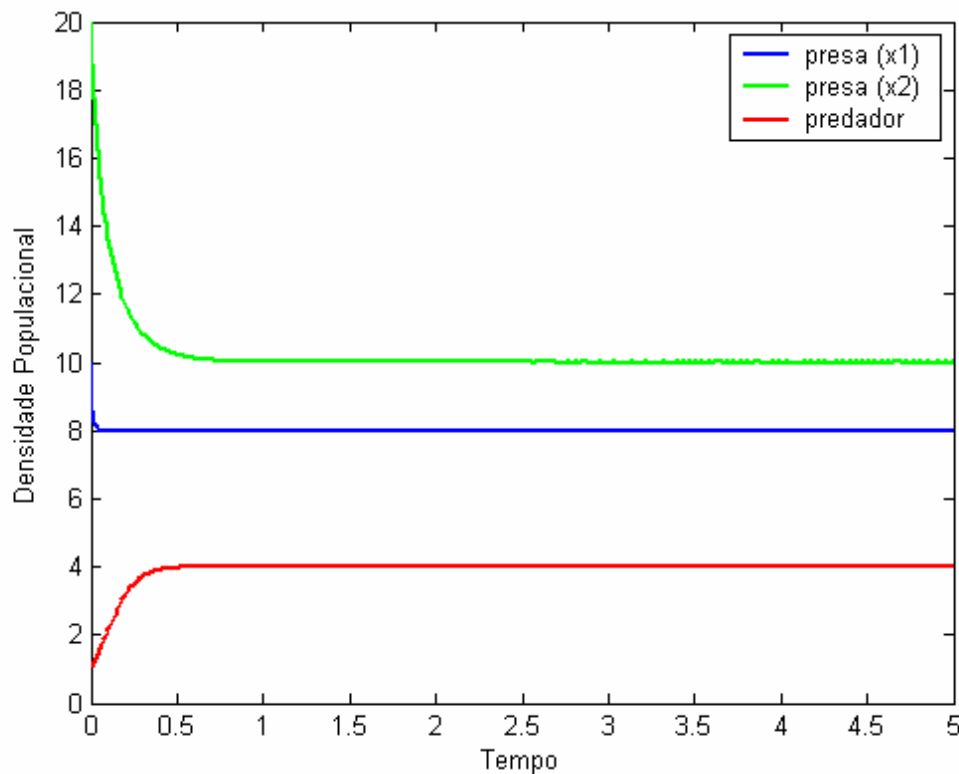


Figura 5.1. Trajetórias do sistema Lotka-Volterra com controle ótimo não-linear (5.13)

5.3. Controle linear com a matriz Q_1

Conforme o controle linear descrito no Capítulo 3, o modelo de Lotka-Volterra controlado tem a forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \tilde{u}_i + u_i \right) \quad i=1, \dots, n. \quad (5.14)$$

onde

$$\tilde{u}_i = r_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{x}_j \quad i=1, \dots, n. \quad (5.15)$$

O controle ótimo, para sistemas lineares segundo (3.22) é dado por

$$u = -R^{-1} B^T P y,$$

ou no caso

$$\begin{aligned} u_1 &= -2,3001(x_1 - \tilde{x}_1) + 0,0189(x_2 - \tilde{x}_2) + 0,0628(x_3 - \tilde{x}_3), \\ u_2 &= 0,0189(x_1 - \tilde{x}_1) - 2,3529(x_2 - \tilde{x}_2) + 0,0079(x_3 - \tilde{x}_3), \\ u_3 &= 0,0628(x_1 - \tilde{x}_1) + 0,0079(x_2 - \tilde{x}_2) - 2,3166(x_3 - \tilde{x}_3). \end{aligned} \quad (5.16)$$

A trajetória para o controle considerado está na Figura 5.2. As simulações foram realizadas com condições iniciais (10,20,1) e o ponto de equilíbrio (8,10,4):

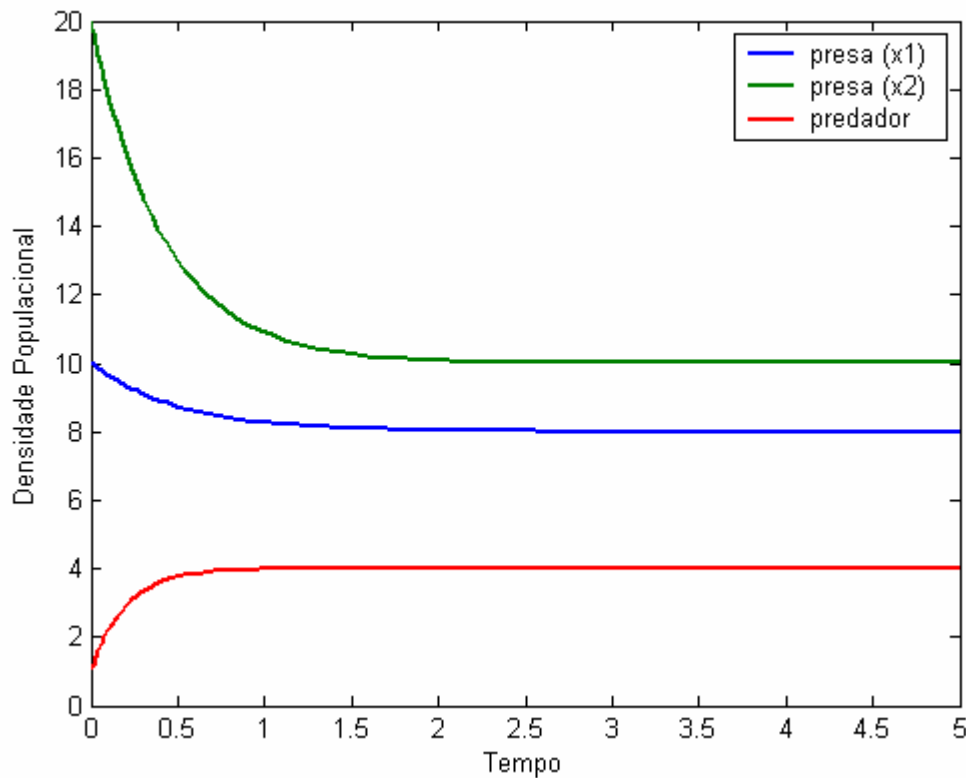


Figura 5.2. Trajetórias do sistema Lotka-Volterra com controle ótimo linear (5.16).

5.4. Análise dos resultados

Fazendo uma análise breve sobre os resultados obtidos, pode-se verificar que tanto o controle não-linear (Figura 5.1), quanto o controle linear (Figura 5.2), estão convergindo rapidamente para o ponto de equilíbrio. Porém o controle não-linear, além de convergir mais rápido para o ponto de equilíbrio, apresenta um valor de funcional bem mais baixo do que o controle linear, conforme se pode verificar abaixo.

O valor do funcional para o controle não-linear é encontrado conforme a função de Lyapunov:

$$J_{\min}^{li} = V(x_0) = \sum_{i=1}^3 c_i \left(x_i(0) - x_i^* - x_i^* \ln \left(\frac{x_i(0)}{x_i^*} \right) \right). \quad (5.17)$$

O valor calculado através da fórmula (5.17) é $J = 5,8286$.

Já para o controle linear o valor do funcional, calculado por

$$J_{\min}^{li} = V(x_0) = x_0^T P x_0, \quad (5.18)$$

é de $J = 1608,2$.

CAPÍTULO VI

Controle ótimo aplicado em Agroecossistemas

6.1. Considerações sobre o Controle Biológico

Vivemos em uma época em que a necessidade de produção de alimentos é cada vez maior, pois o crescimento da população tem-se dado a taxas elevadas nas últimas décadas, o que requer um crescimento bem maior na produção. Este crescimento poderia ser maior não fossem as perdas que acontecem, principalmente ao se considerar perdas com ataques de pragas.

Segundo a EMBRAPA, mais de 20 espécies de lagartas foram consideradas pragas para a lavoura da soja no Brasil. A incidência de pragas se dá devido a vários fatores, como a estação do ano, a umidade relativa do ar, a orientação do vento, a temperatura, dentre outros, além de que os métodos de elaboração e manutenção do solo também influenciam na incidência de pragas ou de doenças.



É necessário tomar uma boa decisão de controle para livrar as plantas das pragas, minimizando os custos e maximizando os rendimentos, sem prejudicar o meio ambiente.

O mais usual é o controle das pragas com agrotóxicos, porém este tipo de controle leva a extinção não somente das pragas, como também dos demais animais, insetos e larvas que habitam o sistema, ocasionando mais tarde o ressurgimento das pragas pela falta de inimigos naturais, ou até mesmo o surgimento de outros tipos de pragas.

Por muito tempo acreditou-se que as lavouras estariam protegidas com o uso de defensivos químicos, até que começou-se a perceber e admitir que a infestação das lavouras persistia e se agravava pela resistência cada vez maior das pragas aos agrotóxicos. (Globo Rural, 8, 84 – Out. 1992).

Outra forma de controle de pragas da soja que surgiu, foi o do uso do Baculovirus, porém este está perdendo sua capacidade de combater pragas com eficácia. Entre os fatores que causam esta perda de eficácia geralmente são mencionadas condições climáticas, baixa qualidade do Baculovirus, entre outras. Mas o fator principal que causa este fenômeno é o surgimento de gerações de pragas resistentes ao vírus.

Segundo De Bach (1964), dentro do controle biológico existem três tipos a considerar:

1- O controle biológico clássico que envolve a investigação a respeito da origem da praga, a fim de descobrir quais são seus inimigos naturais. Neste tipo de controle, indivíduos da espécie inimiga são trazidos (importados) para que se reproduzam de forma natural e ataquem a praga. Este é o tipo de controle biológico mais antigo e que tem tido mais sucesso recentemente.

2- O controle por aumento é um método mais recente, que consiste na liberação de grandes quantidades de inimigos naturais, os quais são produzidos em grande escala em laboratórios. A liberação pode ser feita apenas no período e local em que for necessária. Este método exige uma contínua manutenção e não fornece uma solução permanente.

3- O controle de conservação enfatiza a manipulação de aspectos de ecossistema para conservar e aumentar populações de inimigos naturais de modo que os problemas com a praga fiquem reduzidos.

Segundo Bassanezi (2004), o controle biológico é a estratégia utilizada a muito tempo pela natureza para manter o equilíbrio dos ecossistemas. O que se busca atualmente, é colocar em prática a diversificação do plantio (rotação de cultura), a preservação de espécies nativas, a criação de plantas transgênicas, a introdução de inimigos naturais e o desenvolvimento de novos bioinseticidas.

Cabe aqui enfatizar que do ponto de vista ecológico, uma espécie é considerada praga se sua densidade populacional ultrapassa o nível que causa danos econômicos. Existe

um limite máximo aceitável de pragas na lavoura, no caso da lagarta da soja, segundo a EMBRAPA, para as espécies *Anticarsia gemmatalis* e *Pseudoplusia includens*, o controle deve ser aplicado quando forem encontrados em média a densidade de 20 lagartas grandes por metro quadrado (lagartas com mais de 1,5 cm de comprimento) ou 40 lagartas pequenas (lagartas com 0,5 a 1,5 cm de comprimento) por metro quadrado.



O objetivo neste capítulo é aplicar os métodos do controle ótimo desenvolvidos nos capítulos anteriores, com o propósito de levar o ecossistema considerado a um estado de equilíbrio positivo em que a densidade de pragas se estabilize sem causar danos econômicos, e que a população de inimigos naturais se estabilize em um valor suficiente para controlar as pragas.

6.2. Aplicação do controle para um sistema presa-predador

Objetiva-se obter uma estratégia de controle de pragas através de introdução de inimigos naturais, que leve o sistema presa-predador a um estado de equilíbrio em que a densidade de pragas se estabilize sem causar danos econômicos, e que a população de inimigos naturais se estabilize em um valor suficiente para controlar as pragas. Este problema é formulado inicialmente para o modelo de Lotka-Volterra de uma presa e um predador dado por:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x(a - \gamma x - \alpha y), \\ \frac{dy}{dt} &= y(-b + \beta x),\end{aligned}\tag{6.1}$$

onde x representa a densidade das pragas e y representa a densidade dos inimigos naturais.

Os termos ax e $-by$ representam a taxa de crescimento das pragas e taxa de mortalidade dos predadores, respectivamente.

A Figura 6.1, traz as trajetórias temporais para o modelo (6.1).

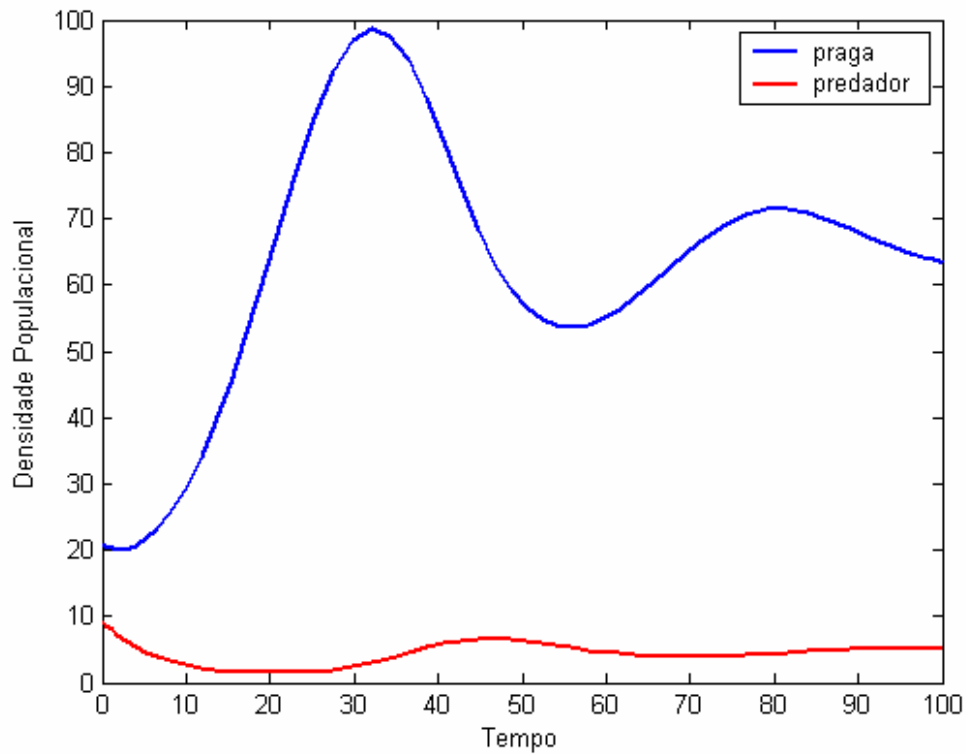


Figura 6.1. Trajetórias temporais sem aplicação do controle.

Devemos lembrar que existe um limite máximo de pragas aceitável na lavoura, de onde, um número maior ocasionaria danos econômicos. Vamos designar por x_d este valor. Neste caso $x_d = 20$ ou $x_d = 40$ para lagartas de soja grandes ou pequenas, respectivamente.

O modelo que descreve o sistema (6.1) com a aplicação do controle é dado por:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(a - \gamma x - \alpha y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(-b + \beta x + U). \end{aligned} \quad (6.2)$$

A função de controle U consiste de duas partes e tem a seguinte forma:

$$U = \bar{u} + u,$$

conforme visto anteriormente a parte \bar{u} chama-se *controle feedforward* e representa a introdução de inimigos naturais para levar o sistema ao ponto de equilíbrio desejado, e a parte u chama-se *controle feedback* e garante a estabilidade do sistema neste ponto de equilíbrio.

O controle *feedforward* pode ser escolhido como:

$$\bar{u} = -y^* (-b + \beta x^*), \quad (6.3)$$

onde x^* e y^* são os valores desejados de pragas e predadores, respectivamente.

Para encontrar u , é formulado o seguinte problema do controle ótimo: encontrar a função de controle u que transfere o sistema (6.2) do estado inicial:

$$x(0)=x_0, \quad y(0)=y_0.$$

ao estado final

$$x(\infty) = x_d = x^*, \quad y(\infty) = y^*,$$

minimizando o funcional

$$J[u] = \int_0^{\infty} [Y^T Q Y + u^2] dt, \quad (6.4)$$

onde $Y = \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix}$ e a matriz $Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix}$ é definida positiva.

Para resolver o problema acima formulado utiliza-se a metodologia proposta no Capítulo 2.

As matrizes A e B para este caso, são:

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & \alpha \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Então as matrizes \bar{A} e \bar{B} têm a forma

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} c_1 \gamma & c_1 \alpha \\ -c_2 \beta & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Conforme a fórmula (2.27), o controle ótimo neste caso é

$$u = \frac{1}{2m} c_2 y, \quad (6.5)$$

onde c_2 pode ser encontrado da fórmula (2.36) que neste caso tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & \alpha \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma & -\beta \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \right) + \frac{1}{4m} \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix},$$

ou

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c_1 \gamma & c_1 \alpha \\ -c_2 \beta & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} c_1 \gamma & -c_2 \beta \\ c_1 \alpha & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4m} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_2^2 \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

De (6.6) segue:

$$\begin{aligned} q_{11} &= c_1 \gamma, \\ q_{12} &= \frac{1}{2} c_1 \alpha - \frac{1}{2} c_2 \beta, \\ q_{22} &= \frac{1}{4m} c_2^2. \end{aligned} \quad (6.7)$$

A simulação do controle ótimo de pragas na lavoura de soja foi realizada com os parâmetros que estão presentes na Tabela 6.1.

A	b	α	x_0	y_0	γ	β	x_d
0,16	0,19	0,02	21	9,2	0,001	0,0029	20

Tabela 6.1. Valores dos parâmetros do modelo (6.1).

Escolhendo $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $m = 1$ e levando em conta os valores da Tabela 6.1, de (6.7) obtemos:

$$Q = \begin{bmatrix} 0,001 & 0,00855 \\ 0,00855 & 0,25 \end{bmatrix},$$

que é matriz definida positiva.

As simulações para os resultados estão presentes na Figura 6.2.

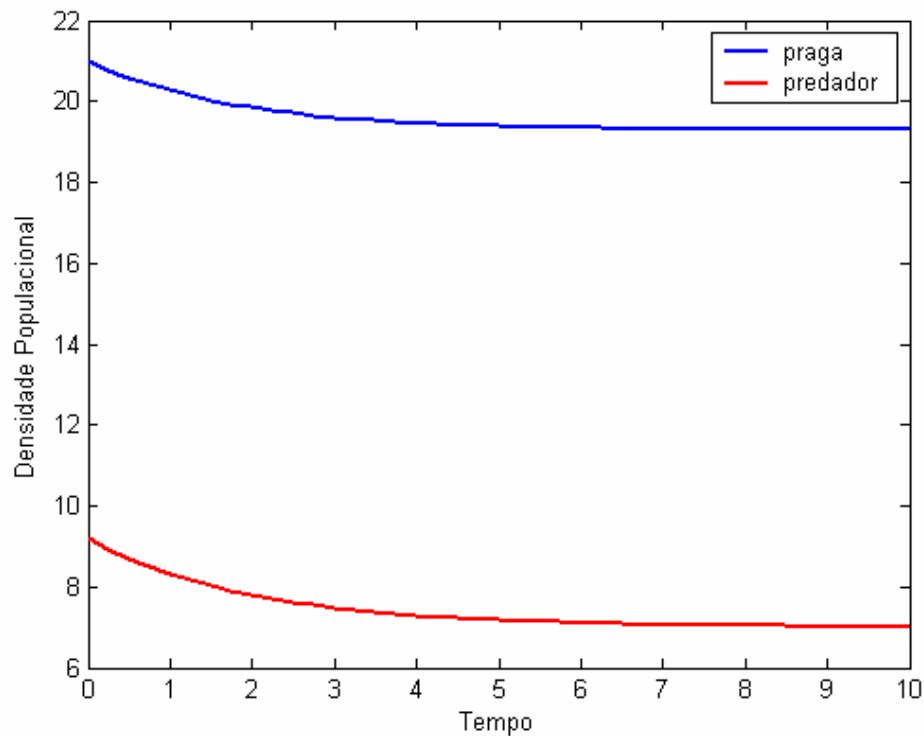


Figura 6.2. Trajetórias temporais para o sistema com aplicação do controle.

Conforme se pode verificar na figura acima, a população de pragas diminuiu até o nível desejado e a população de predadores manteve-se em um nível que assegura o controle do sistema.

6.3. Aplicação do controle para o sistema duas presas e um predador

Para este problema são considerados dois tipos de pragas e um tipo de predador. As pragas consideradas são *R. nu* e *P. includes*. Estas pragas têm características semelhantes (por exemplo, ciclo de vida), mas podem ter reações diferentes. O que pode gerar uma dinâmica não-linear complexa do ecossistema.

O coeficiente que caracteriza a taxa de reprodução das duas espécies de pragas consideradas conforme Molter (2003) é de 0,17.

Considerando a taxa de reprodução de predadores $b = 0,19$ (Feltrin, Rafikov, 2002) estudaremos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= 0,17 \left(1 - \frac{x_1}{1000} \right) - 0,00017x_1x_2 - 0,0017x_1x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= 0,17 \left(1 - \frac{x_2}{1000} \right) - 0,000255x_1x_2 - 0,0017x_2x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= -0,19x_3 + 0,00095x_1x_3 + 0,000095x_2x_3.\end{aligned}\quad (6.8)$$

Podemos verificar em (6.8) que a capacidade de suporte para as duas pragas é de 1000 e os valores dos coeficientes de captura são os mesmos, sendo iguais a 0,0017. Já os valores dos coeficientes de competição são diferentes (0,00017 e 0,000255). Para o predador, a taxa de conversão também é diferente para cada presa (0,00095 e 0,000095), o que significa que a influência da segunda praga é 10 vezes menor do que a primeira.

As trajetórias do sistema (6.8), podem ser vistas na Figura 6.3. As condições iniciais são (20,30,1):

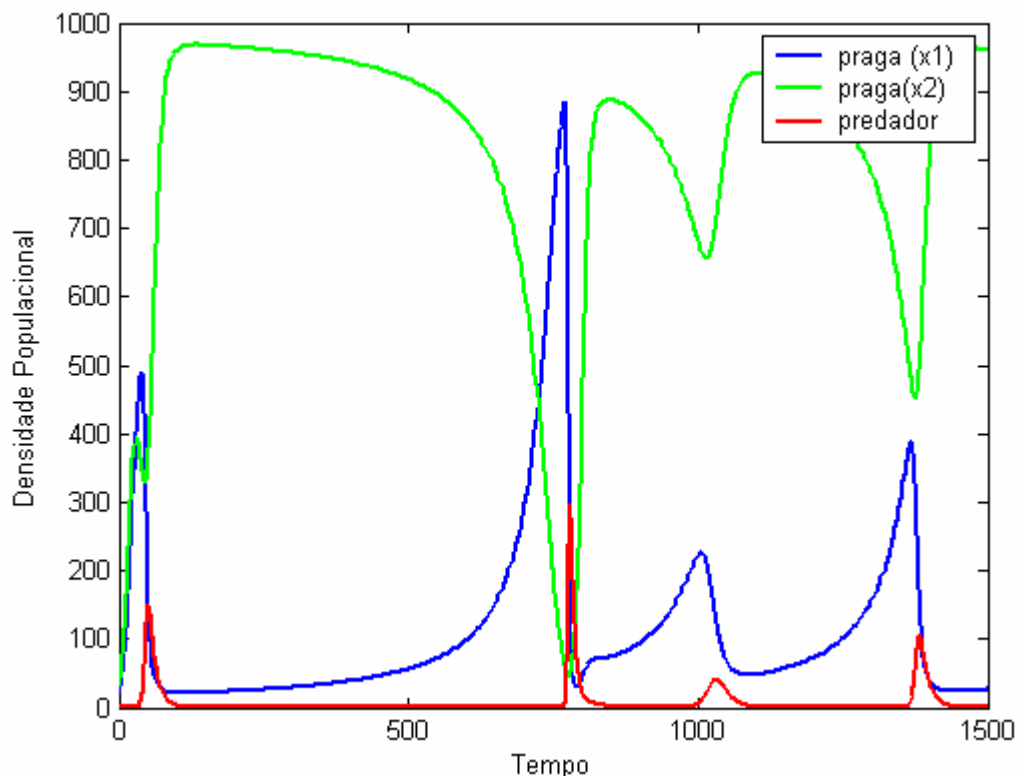


Figura 6.3. Trajetórias temporais do sistema sem aplicação de controle.

Como se pode verificar, as densidades de pragas estão bem acima do nível que não causa danos econômicos.

6.3.1. Aplicação do controle não-linear

Conforme o controle não-linear desenvolvido no Capítulo 2, temos o sistema de Lotka-Volterra de duas presas e um predador com a aplicação do controle, descrito como:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j + \bar{U}_i + u_i \right) \quad i=1,2,3. \quad (6.9)$$

onde $r_1 = r_2 = 0,17$, $r_3 = -0,19$,

$$a_{11} = a_{12} = 0,00017, \quad a_{22} = 0,00017, \quad a_{13} = 0,0017, \quad (6.10)$$

$$a_{21} = 0,000255, \quad a_{23} = 0,0017, \quad a_{31} = -0,00095, \quad a_{32} = -0,000095.$$

Onde a parte \bar{U}_i é o controle feedforward determinado por (2.7) e u_i é o controle feedback, encontrado conforme (2.27). Para a simulação numérica do sistema o ponto de equilíbrio escolhido foi (8; 10; 6.5) com condição inicial de (20,30,1).

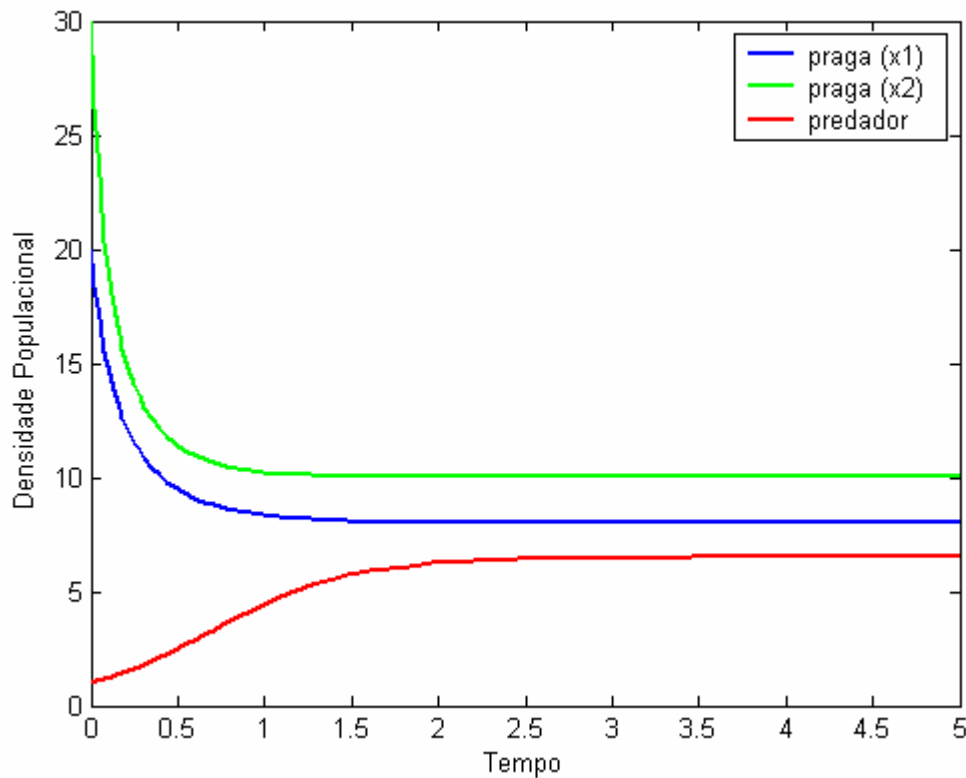


Figura 6.4. Trajetória temporal do sistema com controle não-linear

Com a aplicação deste controle, obteve-se um resultado satisfatório, onde as três espécies entram em equilíbrio em aproximadamente dois dias.

6.3.2. Aplicação do controle linear

Utilizaremos agora o controle linear descrito no Capítulo 3, onde temos o sistema controlado com a seguinte forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(r_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j) + \tilde{u}_i + u_i \quad i=1,2,3. \quad (6.11)$$

onde os coeficientes têm os valores dados por (6.10).

A parte \tilde{u}_i do vetor de controle que mantém o sistema controlado na trajetória desejada está dado em (3.15). Já a parte u_i do vetor de controle é dado conforme (3.10).

A Figura 6.5 traz a simulação numérica do sistema com ponto de equilíbrio (8; 10; 6.5) e condição inicial de (20,30,1).

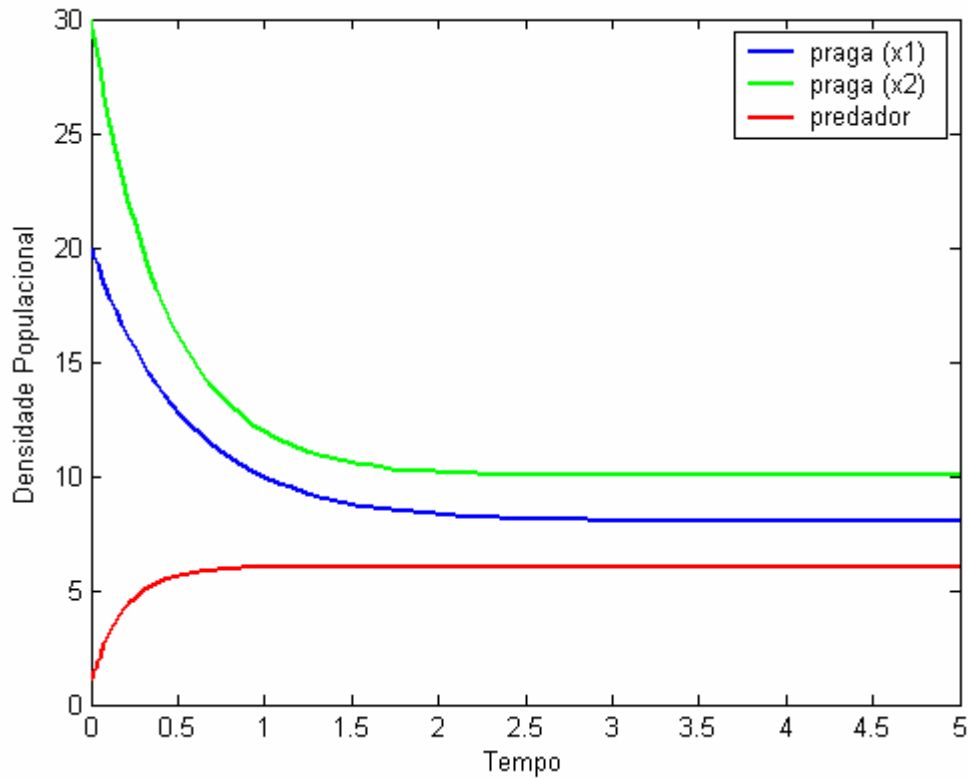


Figura 6.5. Trajetória temporal do sistema com controle linear.

Com a aplicação do controle linear, os resultados foram menos satisfatórios, o equilíbrio para as três espécies foi obtido após 1 dia e meio. Em comparação com o controle anterior, pode-se ver que a primeira espécie a entrar em equilíbrio foi a do predador, ao contrário do que acontecia anteriormente.

6.3.3. Aplicação do controle não linear conforme o Teorema de Krasovskii

No Capítulo 4 foi considerado a aplicação do controle não linear conforme o Teorema de Krasovskii, onde o sistema controlado tem a seguinte forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right) + \tilde{u}_i + u_i \quad i=1,2,3. \quad (6.10)$$

onde os coeficientes têm os valores dados por (6.10).

A parte \tilde{u} do vetor de controle que mantém o sistema controlado na trajetória desejada é descrito pela equação (4.3) e as funções de controle ótimo são encontradas pela equação (4.23).

A Figura 6.6 traz a simulação numérica do sistema com ponto de equilíbrio (8; 10; 6.5) e condição inicial de (20,30,1).

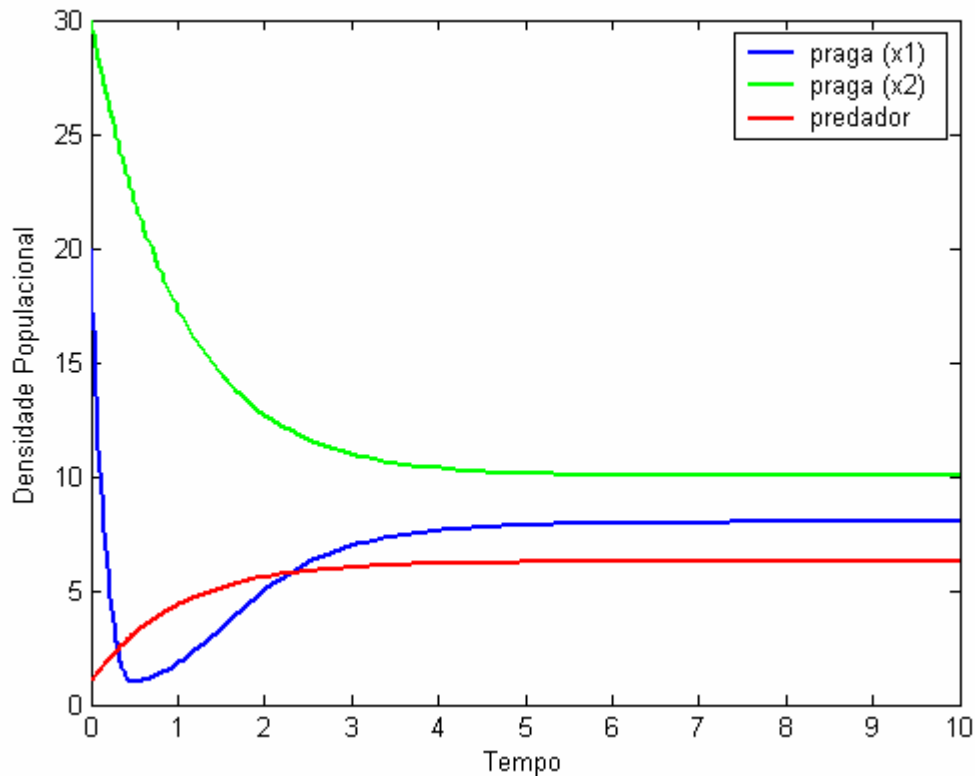


Figura 6.6. Trajetória temporal do sistema com controle não linear conforme Teorema de Krasovskii.

Para este tipo de controle, apesar das três espécies se estabilizarem em torno do equilíbrio desejado, o que acontece depois de 5 dias, pode-se constatar que existe uma diferença considerável no controle da primeira presa, em relação aos dois outros tipos de controle aplicados. A população da primeira presa no início cai até um valor menor do que o nível desejado, e logo depois a população da primeira presa começa a crescer aproximando-se do nível desejado, o que leva a um resultado contraditório, ou seja, o controle ótimo para a primeira praga inicialmente diminui a população, mas logo exige a introdução deste tipo de praga, o que contradiz o conceito do controle de pragas.

Comparando as trajetórias das figuras 6.4, 6.5 e 6.6, verifica-se que o controle linear e o controle não-linear proposto neste trabalho mostraram-se eficientes para o controle biológico de pragas.

CONCLUSÃO

O objetivo principal de desenvolver um método de controle não-linear para o sistema de Lotka-Volterra generalizado de n espécies foi alcançado. O controle não-linear proposto (Capítulo 2), em comparação com os outros dois controles (linear-Capítulo 3 e não-linear-Capítulo 4) mostrou-se mais eficiente.

Os três tipos de controle ótimo considerados para o sistema de Lotka-Volterra que exibe comportamento caótico, levaram o sistema para a trajetória desejada. Em comparação com os três controles analisados, se pode observar que o controle não linear é mais eficiente (tem período transitório menor) que o linear.

Como forma de aplicar e comparar os controles desenvolvidos a situações concretas, utilizou-se um problema do controle ótimo de pragas. Cabe aqui enfatizar o importante uso do controle ótimo em agroecossistemas, onde se obtém, além de uma minimização de custos e de riscos ambientais, a possibilidade da realização de previsões e de estratégias a serem tomadas.

As simulações mostraram que para o controle de pragas, os três controles aplicados estabilizaram o sistema no nível desejado, ficando abaixo de danos econômicos. Porém o controle não-linear proposto conforme o Teorema de Krasovskii, apesar de estabilizar em torno do ponto de equilíbrio, mostrou-se contraditório. Já tanto o controle linear quanto o controle não-linear proposto, mostraram-se adequados para serem aplicados.

Não se deve deixar de levar em conta que num ecossistema real, as espécies que interagem entre si, estabelecem relações muito complexas entre elas. Por este motivo, as estratégias de controle ótimo aplicadas, foram formuladas para o modelo de Lotka-Volterra,

apresentado de uma forma generalizada. Ou seja, a construção das funções de controle baseadas no modelo generalizado de Lotka-Volterra de n espécies permite a aplicação de tais controles em vários casos diferentes deste modelo.

BIBLIOGRAFIA

- Abed, E.H., Wang, H.O. and Tesi, A. Control of bifurcation and chaos, in “The Control Handbooks” (W.S. Levine, ed), CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.
- Abmad, S. *Extinction of species in nonautonomous Lotka-Volterra systems*. Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 127, no. 10, (1999) p. 2905-2910.
- Anderson, B.D.O. and Moor, J.B. “Optimal Control: Linear Quadratic Methods”, Prentice-Hall, NY, 1990.
- Astolfi, A. and Ortega, R. Immersion and invariance: A new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems, *IEEE Trans. Automat. Control* 46(4): (2003) p. 590–606. Andrievskii, B.R. and Fradkov, A.L. Control of Chaos: Methods and Applications, *Automation and Remote Control*, 64 (5) (2003) 673-713.
- Barbashin, E.A. “Lyapunov Functions”, Nauka , Moscow, 1970 (in Russian)
- Bassanezi, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. 2 ed. São Paulo: Contexto (2002). Bassanezi, R.C. “Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia”, Contexto, São Paulo, 2002.
- Beddington, J. R. and May, R. M. *Harvesting natural populations in a randomly fluctuating environment*, *Science* 197: (1977). P. 463–465.
- Bellman, R. “Dynamic Programming”, Princeton, New Jersey, 1957.
- Boukal, D. S. and Krivan, V. Lyapunov functions for Lotka-Volterra predator-prey models with optimal foraging behavior. *Journal of Mathematical Biology*. 39. (1999) p. 493-517.
- Bewley, T.R. Linear control and estimation of nonlinear chaotic convection: Harnessing the butterfly effect, *Physics of Fluids*, 11 (5) (1999) 1169-1186.

- Briggs, J. e Peat F. D., “A sabedoria do caos”, Campus. (2000).
- Boccaletti, S., Greboggi, C., Lai, Y.C., Mancini, H. and Maza, D. The Control of Chaos: Theory and Applications, *Physics Report*, 329 (2000) 103-197
- Chen, G. On some controllability conditions for chaotic dynamics control, *Chaos Solit. Fract.*, 8 (1997) 1461-1470.
- Chen, G. and Dong, X. From chaos to order, perspectives and methodologies in controlling chaotic nonlinear dynamical systems, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 3 (1993) 1363-1409.
- Clark, C.W. Economically optimal policies for the utilization of biologically renewable resources, *Math. Biosci.*, 12, (1971), 245-260.
- Costa, M.I.S., Boldrini, J.L. and Bassanezi, R.C.. Optimal chemical control of populations developing drug resistance, *IMA J. Math. Appl. Med. Biol.*, 9 (1992) 215-226.
- Costa, R.H.R., Bavaresco, A.S.L., Medri, W. and Philipi, L.S. Tertiary treatment of piggery wastes in water hyacinth ponds, *Water Science and Tecnology*, 42 (10-11) (2000) 211-214.
- Costa, R.H.R., Zanotelli, C.T., Hoffmann, D.M., Belli Filho, P., Perdomo, C.C. and Rafikov, M. Optimization of the treatment of piggery wastes in water hyacinth ponds, *Water Science and Tecnology*, 48 (2) (2003) 283-289.
- Costa, J. F. and Meyer, A. *Ecologia Matemática*. Seminário Brasileiro de Análise SBA. IMECC-UNICAMP. P. 342-378.
- Costa, M. I. S., Kaszkurewicz, E. and Bhaya, A. *Achieving global convergence to an equilibrium population in predator-prey systems by the use of discontinuous harvesting policy*, *Ecological Modelling* 128: (2000) p. 89–99.
- Cunha, F. B., Pagano, D. J and Moreno, U. F. Sliding bifurcations of equilibria in planar variable structure systems, *IEEE Trans. Circuits and Systems–I: Fundamental Theory and Applications* 50 (8), (2003) p. 1129–1134.
- De Bach, P.. The scope of biological Control of insets pest and weeds. Chapman & Hall, London, U. K. (1964) p. 3-20.
- Dent, D. Integrated Pest Management. Chapman & Hall, London, U. K. p. 356.
- Debach, P. “Biological control by natural enemies”, Univ. Press, 1974.
- El-Gohary, A. e Yacen, M. T. *Optimal control and synchronization of Lotka-Volterra model*. *Chaos, Solutions and Fractals* 12 (2001) p. 2087-2093.

- Feltrin, C.C. e Rafikov, M. Aplicação de função de Lyapunov num problema de controle ótimo de pragas, *Tema: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 3(2) (2002) 83-92.
- Forbes, S.A. On some interactions of organisms, *Bulletin Illinois State Laboratory of Natural History*, 1, (1880), 3-17.
- Fradkov, A. L and Pogromsky, A. Y. *Introduction to Control of Oscillations and Chaos*, Vol. 5 of *Nonlinear Science*, World Scientific, Singapore. (1998).
- Gard, T. Persistence in food chains with general interactions, *Math. Biosci.*, 51 (1980) 165-174.
- Gause, G.F. "The Struggle for Existence", Williams and Wilkins, Baltimore, 1934.
- Gilpin, M.E. Spiral chaos in a predator-prey model, *American Naturalist*, 113 (1979) 306-308.
- Goh, B.S. Optimal control of a fish resource, *Malay. Sci.*, 5 (1969) 65-70.
- Goh, B.S., Leitman, G. and Vicent, T. L. The optimal control of a prey-predator system, *Math. Biosci.*, 19 (1974) 263-286.
- Goh, B.S. "Management and analysis of biological populations", Elsevier Scientific Publishing Company: Amsterdam, 1980.
- Gurney, W. S. C. and Nisbet, R. M. *Ecological dynamics*, Oxford University Press, New York. (1998)
- Hasting, A. and Powell, T. Chaos in a three-species food chain, *Ecol.*, 72 (1991) 896-903.
- Holling, C.S. The Components of predation as revealed by a study of small mammal predation of the european pine sacuflly. *Can. Entomology*, 91 (1959) 293-320.
- Yount J.L. and Crossman, R.A. Eutrophication control by plant harvesting. *JWPCF*, v.42. (1970).
- Jiang, G., Chen, G. and Tang, W. *A new criterion for chaos synchronization using linear state feedback control*. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 13, No. 8 (2003) p. 2343-2351.
- Kuznetsov, Y. A., Rinaldi, S. and Gragnani, A. One-parameter bifurcations in planar Filippov systems, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 13(8): (2003) p. 2157–2188.
- Lee, C. S and Leitmann, G. On optimal long-term management of some ecological systems subject to uncertain disturbances, *Internat. J. Systems Science* 14(8): (1983) p. 979–994.

- Leenheer, P. D., Angeli, D. and Sontag, E. *On predator-prey systems small-gain theorems*. Mathematical Biosciences and engineering. Vol. 2, no. 1, (2005) p. 25-42.
- Letov, A. M.. The analytical design of control systems. Automation and Remote Control 22, (1961) p. 363-372.
- May, R. *Stability and Complexity in Model Ecosystems*, Princeton University Press. (1973)
- Mazenc, F. and Niculescu, S. Lyapunov stability, analysis for nonlinear delay systems, *Systems and Control Letters* 42(4): (2001) p. 245–251.
- Meza, M. E. M.. Nonlinear systems of the predator-prey type: Control design using Liapunov unctions. (2004).
- Meza, M. E., Bhaya, A. and Kaszkurewicz, E. Controller Design for the Lotka-Volterra nonlinear system. *Revista Controle & Automação*. Vol. 16, no. 2. (2005).
- Molter, A. e Rafikov, M. Controle ótimo para um sistema de Lotka-Volterra. *Anais do II Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações*. São José dos Campos. SBMAC, v.2, (2003) p.1634-1641.
- Moreno, U. F., Peres, P. L. D. and Bonatti, I. S. Analysis of piecewise-linear oscillators with hysteresis, *IEEE Trans. Circuits and Systems–I: Fundamental Theory and Applications* 50(8): (2003) p. 1120–1124.
- Pykh, Y. A. Lyapunov functions for Lotka-Volterra systems: an overview and problems. Procieding of 5 FAC Symposium “Nonlinear Control Systems” (2001) p. 1655-1660.
- Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze R.V. and Mischenko, E.F. “The Mathematical Theory of Optimal Processes”, Interscience Publishers, Inc., New York, 1962.
- Pyragas, K. Continuous control of chaos by self controlling feedback, *Phys. Lett. A*, 170 (1992) 421-428.
- Rafikov, M. Aplicação de teoria de controle ótimo em dinâmica populacional. In: *Dinâmica, Controle e Aplicações*. 2002, v. 1, p. 311-340.
- Rafikov, M. Determinação dos parâmetros de modelos biomatemáticos, *Ciência e Natura*, UFSM, Santa Maria, 19 (1997) 7- 20.
- Rafikov, M. e Balthazar, J.M. Aplicações de funções de Lyapunov no controle ótimo de regimes caóticos de sistemas populacionais. *Anais do II Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações*. São José dos Campos. SBMAC, v.2, (2003) p. 934-955.
- Rafikov, M. and Balthazar, J.M On a optimal control design for Rössler system, *Phys. Lett. A*, 333 (2004) 241-245.

- Rafikov, M. and Balthazar, J.M. Síntese do controle ótimo linear feedback para sistemas que exibem caos. *Anais do II Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações*, Ilha Solteira. SBMAC, v.3, (2004) p. 619-633.
- Rafikov, M., Balthazar, J.M. and Molter, A. Nonlinear optimal feedback control for the chaotic Lotka -Volterra system (Submitted in *Phys. Lett. A*)
- Rafikov, M. and Balthazar, J.M. Optimal pest control problem in population dynamics, *Computational and Applied Mathematics*, 24 (1) (2005) 1–17
- Rafikov, M., Costa, R.H.R., Perdomo, C.C e Zanotelli, C.T. Otimização do tratamento de águas residuais nas lagoas de aguapé, em “Resumo das comunicações do XXIV CNMAC”, v. 2, p.461, SBMAC, 2001.
- Rafikov, M. e Feltrin, C.C. Otimização do controle de pragas: método de funções de Lyapunov, em “Proceedings do Congresso Latino Americano de Biomatemática, X ALAB – V ELAEM”, pp. 71-80, IMECC – UNICAMP, Campinas, 2001.
- Rafikov, M. e Maleico, E.R. Controle ótimo de pragas com base no modelo generalizado de presa – predador, *Tema: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 1 (2000) 215-222.
- Rafikov, M. and Sakr, L. C. Optimal pest control of prey-predator systems, em “Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and Their Applications to Engineering Sciences” (J.M. Balthazar, P.B. Gonçalves, I.L. Caldas, R.M.F.L.P.F. Brasil, F.B. Rizzato, eds), v.6, p.323-330, Rio Claro, 2002.
- Rinaldi, S.R., Casagrandi, A. Reduced order models for the prediction of the time of occurrence of extreme episodes, *Chaos, Solitons and Fractals*, 12, (2001) 313-320.
- Rosenzweig, M.L. and MacArthur, R.H. Graphical Representation and stability conditions of predator-prey interactions, *Am. Nat.*, 97, (1963), 209-223.
- Rossler, O.E. An equation for continuous chaos, *Phys. Lett. A*, 57 (1976) 397.
- Savi, M. A. Caos em sistemas mecânicos. Anais do I Congresso de dinâmica, controle e aplicações. SBMAC. Vol 1. (2002) p. 1-27.
- Segel, L.A. “Modeling dynamic phenomena in molecular and cellular biology”, Univ.Press, Cambridge, 1984.
- Shoemaker, C.A. Optimization of Agricultural Pest Management III: Results and Extension of a Model, *Math. Bioci.*, 1973.
- Sinha, S.C., Henrichs, J.T. and Ravindra, B. A general approach in the design of active controllers for nonlinear systems exhibiting chaos, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10 (1) (2000) 165-178.

- Svireghev, Y.M. and Elizarov, E.Y. “Mathematical modeling of biological systems”, Nauka, Moscou, 1972. (em russo)
- Steele, J. H. and Henderson, E.W. Modeling long-term in fish stocks, *Science* 224: (1984) p. 985–987.
- Schmid, A. B. e Rafikov, M. Controle de sistemas populacionais que exibem caos, *Anais do III Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações*. Ilha Solteira. SBMAC, v.3, (2004) p. 659-663.
- Takeuchi, Y., Adachi, N. and Tokumaru, H.. *Global Satility of Ecosystems of the Generalized Volterra Type*. *Mathematical Biosciences* 42 (1978) p. 119-136.
- Ternes S. e Yang, H.M. Estudo Introdutório de Avaliação da Interação entre Parasitóide Nativo e Exótico no Controle biológico de Pragas, *Revista de Biomatemática*, 10, Unicamp, Campinas, (2000) 16-34.
- Thomas M.B. and Willis, A.J. Biocontrol- risky but necessary, *Trends in Ecology and Evolution*, 13 (1998) 325-329.
- Tusset A. M. e Rafikov, M. Controle ótimo de pragas: modelos linearizados, funcional quadrático, *Tema: Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 5(1) (2004) 145-154.
- Van den Bosh, R., Messenger, P.S. and Gutierrez, A.P. “An Introduction to Biological Control”, Plenum Press, New York, 1982.
- Vance, R. Predation and resource partitioning in one predator-two prey model community, *American Naturalist*, 112 (1978) 797-813.
- Vincent T.L. and Yu, J. Control of a chaotic system, *Dyn. Control*, 1 (1991) 35-52.
- Volterra, V. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically, *Nature*, 118, (1926) 558-560.
- Vincent, T. L., Lee, C. S. and Goh, B.S.. Maintenance of an equilibrium state in the presence of uncertain inputs, *Internat. J. Systems Science* 16(11): (1985) p. 1335–1344.
- Von Bertalanffy, L. “Théorie générale des systèmes, Dunod, Paris, 1973.
- Watt, K.E.F. “Ecology and resource management: a quantitative approach”, McGraw-Hill, New York, 1968.
- Wein, L. M., Zenios, S. A. and Nowak, M. A. Dynamic multidrug therapies for HIV: A control theoretic approach, *J. Theor. Biol.* 185(1): (1997) p. 15–29.

Zhang, Y., Liu, B. and Chen, L. *Extinction and permanence of a two-prey one-predator system with impulsive effect*. *Mathematical Medicine and Biology*. (2003), p. 309-325.

Zhang, X., Chen, L. and Neumann, A.U. The stage-structured predator-prey model and optimal harvesting policy, *Math. Biosci.*, 168, (2000), 201-210.