MERCEDES MATTE DA SILVA

DIFICULDADES DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO EM QUESTÕES DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Orientador: Prof Dr. Lorí Viali

PORTO ALEGRE
2006

MERCEDES MATTE DA SILVA

DIFICULDADES DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO EM QUESTÕES DE MATEMÁTICA DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.

Aprovada em 20 de janeiro de 2006, pela Banca Examinadora.

BANCA EXAMINADORA:

____

Prof. Dr. Lorí Viali – PUCRS

____

Profª.Drª. Helena Noronha Cury – PUCRS

____

Prof.Dr. Francisco Egger Moellwald – UFRGS

Dedico esse estudo aos meus
pais, Marcelo Bidart da Silva e
Maria Martha Matte da Silva,
que sempre apoiaram minhas
escolhas e me fizeram lutar
pelas coisas em que acredito.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, com quem estou constantemente aprendendo, pela disposição e atenção sempre incansável neste momento tão importante da minha vida.

As colegas do mestrado com as quais sempre aprendi e dividi momentos que levaram a este fim.

Aos colegas Clarissa Trojack Della Nina, Cláudia Dusso, Édson Luíz Menegassi e Maria Elvira Jardim Menegassi pela colaboração para a realização deste trabalho, sem a qual o mesmo não seria possível.

Aos alunos, sem os quais não realizaria este trabalho, pela disposição e colaboração.

Ao meu irmão Ciro Matte da Silva que sempre me apoiou e ajudou no momento exato.

A minha família e aos meus amigos que me deram força e entenderam minha ausência nos momentos em que precisei me dedicar na realização deste trabalho.

“O abandono da matemática
traz dano a todo o
conhecimento, pois aquele que
a ignora não pode conhecer as
outras ciências ou as coisas
deste mundo.”
Roger Bacon

RESUMO

Neste trabalho são feitas algumas especulações sobre as causas do erro em Matemática. É feita uma investigação da relação do erro tanto com a linguagem matemática quanto a materna. Fatores relacionados com a aprendizagem mecânica e descontextualizada como fontes potenciais de erros são igualmente levantados. A aprendizagem significativa é proposta como uma alternativa a minimização do problema. O estudo foi efetivado por meio de instrumento projetado especificamente com a finalidade de tentar detectar as causas potenciais de erros cometidos por alunos do Ensino Médio, especificamente do segundo e terceiro anos. O estudo abrangeu escolas públicas e privadas. Nas públicas, as esferas municipal e estadual foram contempladas. A amostra investigada foi composta de 150 alunos selecionados aleatoriamente contemplando estudantes de ambos os sexos. A composição do estudo inclui ainda estudantes dos três turnos envolvendo também escolas da capital e do interior.

Palavras chave: Erro em matemática – Relação entre língua materna e erro – Erro e aprendizagem significativa.

ABSTRACT

This study speculates the causes of errors in mathematics. An investigation was undertaken of the relationship of error not only with the language used in mathematics but also with the students' mother tongue. Factors related to mechanical and out-of-context learning were also taken into consideration as potential sources of errors. Significant learning is proposed as an alternative to minimize the problem. The study was put into effect through an instrument projected specifically with the means of trying to identify the potential causes of errors made by junior and senior high school students. Public and private schools participated in the study. Furthermore, in the public school system, both state and municipal schools were included. The sample was composed of 150 randomly selected students of both genders, who studied either in the morning, afternoon or evening in the capital or the countryside.

Key words: Error in mathematics – Relation ship between mother tongue and error – Significant learning

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – IDADE DOS ALUNOS – ESCOLAS A A E – 2005 120

TABELA 2 – SÉRIE DO ALUNO – ESCOLAS A A E – 2005 121

TABELA 3 – SEXO – ESCOLAS A A E – 2005 122

TABELA 4 – ESCOLAS DE A A E – 2005 122

TABELA 5 – MATÉRIA PREFERIDA DO ALUNO – ESCOLAS DE A A E – 2005 123

TABELA 6 – ESCOLARIDADE DO PAI E DA MÃE – ESCOLAS A A E – 2005 124

TABELA 7 – GOSTAR DE ESTUDAR – ESCOLAS DE A A E – 2005 126

TABELA 8 – INTERESSE NA MATEMÁTICA – ESCOLA A A E – 2005 127

TABELA 9 – MATEMÁTICA NA ESCOLA – ESCOLAS DE A A E – 2005 128

TABELA 10 – MATEMÁTICA NO DIA A DIA – ESCOLAS A A E – 2005 129

TABELA 11 – DISCIPLINA AGRADÁVEL – ESCOLAS DE A A E – 2005 130

TABELA 12 – MATEMÁTICA É DIFÍCIL – ESCOLAS A A E – 2005 131

TABELA 13 – MATEMÁTICA E AS SÉRIES SEGUINTES – ESCOLAS A A E – 2005 132

TABELA 14 – MATEMÁTICA E AS OUTRAS DISCIPLINAS – ESCOLAS A A E – 2005 133

TABELA 15 – PENSAMENTO MATEMÁTICO – ESCOLAS A A E – 2005 134

TABELA 16 – LINGUAGEM MATEMÁTICA – ESCOLAS A A E – 2005 135

TABELA 17 – SÍMBOLOS MATEMÁTICOS – ESCOLAS A A E – 2005 136

TABELA 18 – O USO DA MATEMÁTICA – ESCOLAS A A E – 2005 138

TABELA 19 – TERMOS MATEMÁTICOS – ESCOLAS A A E – 2005 140

TABELA 20 – SÍMBOLOS – ESCOLAS A A E – 2005 141

TABELA 21 – “SINÔNIMOS” – ESCOLAS A A E – 2005 142

TABELA 22 – TEOREMA DE PITÁGORAS – ESCOLAS A A E – 2005 144

TABELA 23 – ELEMENTOS DO CÍRCULO – ESCOLAS A A E – 2005 146

TABELA 24 – FIGURAS PLANAS – ESCOLAS A A E – 2005 147

TABELA 25 – EXPRESSÃO ALGÉBRICA – ESCOLAS A A E – 2005 149
TABELA 26 – UNIDADES DE MEDIDA – ESCOLAS A A E – 2005 150
TABELA 27 – COEFICIENTES DE CORRELAÇÃO ENTRE AS QUESTÕES – ESCOLAS A A E – 2005 151
TABELA 28 – OPERAÇÕES BÁSICAS – ESCOLAS A A E – 2005 153
TABELA 29 – RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES – ESCOLAS A A E – 2005...............................155
TABELA 30 – TRANSFORMAÇÃO DE LINGUAGEM – ESCOLAS A A E – 2005......................162
TABELA 31 – RESOLUÇÃO DE PROBLEMA – ESCOLAS A A E – 2005 165
TABELA 32 – PREÇO VANTAJOSO – ESCOLAS A A E – 2005 166
TABELA 33 – ESCOLARIDADE DO PAI COM GOSTAR DE ESTUDAR – ESCOLAS A A E – 2005 168
TABELA 34 – ESCOLARIDADE DA MÃE COM GOSTAR DE ESTUDAR – ESCOLAS A A E – 2005 168
TABELA 35 – MATÉRIA PREFERIDA E GOSTAR DE ESTUDAR – ESCOLAS A A E – 2005 169
TABELA 36 – MATEMÁTICA AGRADÁVEL OU DIFÍCIL? – ESCOLAS DE A A E – 2005 170
TABELA 37 – CONHECIMENTO E SÍMBOLOS – ESCOLAS A A E – 2005............................171
TABELA 38 – DIFICULDADE E O TEOREMA DE PITÁGORAS – ESCOLAS DE A A E – 2005 ...172
TABELA 39 – LINGUAGEM – ESCOLAS A A E – 2005 172
TABELA 40 – MATEMÁTICA NO DIA-A-DIA – ESCOLAS A A E – 2005 173

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 – IDADE DOS ALUNOS – ESCOLAS A A E – 2005 120

GRÁFICO 2 – SÉRIE DO ENSINO MÉDIO – ESCOLAS A A E – 2005................................121

GRÁFICO 3 – SEXO DOS ALUNOS POR ESCOLA – ESCOLAS A A E – 2005.......................122

GRÁFICO 4 – MATÉRIA PREFERIDA DOS ALUNOS. – ESCOLAS DE A A E – 2005 123

GRÁFICO 5 – GOSTAR DE ESTUDAR – ESCOLAS A A E – 2005......................................127

GRÁFICO 6 – MATEMÁTICA E INTERESSE – ESCOLAS DE A A E – 2005 128

GRÁFICO 7 – ESTUDAR MATEMÁTICA? – ESCOLAS DE A A E – 2005.............................129

GRÁFICO 8 – MATEMÁTICA ÚTIL – ESCOLAS A A E – 2005 130

GRÁFICO 9 – MATEMÁTICA AGRADÁVEL? – ESCOLAS DE A A E – 2005..........................131

GRÁFICO 10 – MATEMÁTICA É DIFÍCIL? – ESCOLAS A A E – 2005 132

GRÁFICO 11 – MATEMÁTICA É USADA NAS SÉRIES SEGUINTES? – ESCOLAS A A E – 2005133

GRÁFICO 12 – A MATEMÁTICA USADA EM OUTRAS DISCIPLINAS – ESCOLAS A A E – 2005 134

GRÁFICO 13 – O PENSAMENTO MATEMÁTICO É DIFERENTE? – ESCOLAS A A E – 2005....135

GRÁFICO 14 – A MATEMÁTICA COMO LINGUAGEM – ESCOLAS A A E – 2005 136

GRÁFICO 15 – A MATEMÁTICA E OS SÍMBOLOS – ESCOLAS A A E – 2005........................137

GRÁFICO 16 – USO DA MATEMÁTICA – ESCOLAS A A E – 2005 139

GRÁFICO 17 – TERMOS USADOS NA MATEMÁTICA – ESCOLAS A A E – 2005...................140

GRÁFICO 18 – SÍMBOLOS USADOS NA MATEMÁTICA – ESCOLAS A A E – 2005................141

GRÁFICO 19 – REPRESENTAÇÕES DO 0,2 – ESCOLAS A A E – 2005 143

GRÁFICO 20 – TEOREMA DE PITÁGORAS – ESCOLAS A A E – 2005...............................144

GRÁFICO 21 – ELEMENTOS DO CÍRCULO – ESCOLAS A A E – 2005 146

GRÁFICO 22 – FIGURAS GEOMÉTRICAS – ESCOLAS A A E – 2005.................................148

GRÁFICO 23 – EXPRESSÕES ALGÉBRICAS – ESCOLAS A A E – 2005 149
GRÁFICO 24 – UNIDADES DE MEDIDA – ESCOLAS A A E – 2005 150
GRÁFICO 25 – OPERAÇÕES BÁSICAS – ESCOLAS A A E – 2005 153
GRÁFICO 26 – RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES – ESCOLAS A A E – 2005 156
GRÁFICO 27 – TRANSFORMAÇÃO DE LINGUAGEM – ESCOLAS A A E – 2005 157
GRÁFICO 28 – INTERPRETAÇÃO – ESCOLAS A A E – 2005 158
GRÁFICO 29 – LEITURA DE PERCENTUAIS – ESCOLAS A A E – 2005 160
GRÁFICO 30 – LEITURA DE GRÁFICOS – ESCOLAS A A E – 2005 161
QUESTÃO 16 – PERCENTUAIS DOS ALUNOS POR ESCOLA 162
GRÁFICO 31 – TRANSFORMAÇÃO DE LINGUAGEM – ESCOLAS A A E – 2005 162
GRÁFICO 32 – PROBLEMA – ESCOLAS A A E – 2005 165
GRÁFICO 33 – PREÇO VANTAJOSO – ESCOLAS A A E – 2005 167

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 15

2 OBJETIVOS 18

2.1 IMPORTÂNCIA DO ESTUDO 18

2.2 OBJETIVOS 21

3 SENTIMENTOS E PENSAMENTOS 22

3.1 SENTIMENTOS EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA 22

3.2 O PENSAMENTO 26

3.3 O PENSAMENTO MATEMÁTICO 27

3.4 CONEXÕES DO PENSAMENTO 34

3.5 COMUNICAÇÃO MATEMÁTICA 36

3.6 FECHAMENTO 37

4 A LINGUAGEM MATEMÁTICA 39

4.1 MATEMÁTICA COMO HABILIDADE 39

4.2 O RIGOR NA LINGUAGEM 43

4.3 OS CONCEITOS E AS DEFINIÇÕES 47

4.4 RELACIONAMENTO COM A MATEMÁTICA 53

4.5 LINGUAGEM E COMUNICAÇÃO 54

4.6 FECHAMENTO 55

5 TEORIAS COGNITIVISTAS 57

5.1 PIAGET E O CONSTRUTIVISMO 57

5.2 VYGOTSKY E O PROCESSO SÓCIO-COGNITIVO 59

5.3 Vergnaud e os Campos Conceituais 65
5.4 Ausubel e a Aprendizagem Significativa 70
5.5 Fechamento 75
6 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA..77
6.1 Reflexões sobre aprendizagem 77
6.2 Tipos de aprendizagem matemática 83
6.3 A Educação Matemática no mundo 86
6.4 Análise sobre aprendizagem 87
6.5 Aprendizagem e mudança 90
6.6 Fechamento 92
7 ANÁLISE DE ERROS 93
7.1 Generalização de propriedades 94
7.2 Erro envolvendo propriedades ou conceitos 97
7.3 Erro envolvendo linguagem 100
7.4 Erro envolvendo simbologia 102
7.5 Erro como metodologia 103
7.6 Fechamento 104
8 METODOLOGIA...105
8.1 Paradigma adotado 105
8.2 Sujeitos da pesquisa 109
8.3 Procedimentos e instrumentos 112
8.4 Atividades realizadas 112
8.5 Metodologia de análise 113
8.6 Fechamento 114

9 ANÁLISE DOS DADOS **116**

9.1 ANÁLISE DAS CATEGORIAS 119

9.2 CRUZAMENTO DAS CATEGORIAS 167

10 CONSIDERAÇÕES FINAIS **175**

11 REFERÊNCIAS **187**

1 INTRODUÇÃO

Desde os tempos em que cursei o Segundo Grau, sempre tive preferência pelas disciplinas exatas. Mas foi durante a faculdade que fui me encantando mais e mais pela Matemática. Ali percebia como os números, as equações, as fórmulas, as propriedades se encaixavam de uma forma tal que a sua leitura era cheia de significados. Era possível expressar e desenvolver idéias a partir de uma combinação de símbolos. A estrutura da matéria, a lógica, as demonstrações, tudo fazia sentido. Quanto mais eu conhecia, quanto mais eu aprendia, quanto mais eu estudava, mais e mais eu queria saber, aprender e estudar.

Ao me tornar professora de matemática comecei a participar de encontros, simpósios, congressos e tudo que aparecia para se discutir sobre Matemática e a forma de trabalhar com ela.

Quando comecei a dar aulas, tinha uma meta: que meus alunos pudessem "ver" a Matemática da forma como aprendi a vê-la na universidade. Que os alunos pudessem perceber que é possível aprender Matemática entendendo o que se está aprendendo, sem decorar fórmulas nem seguir modelos prontos. São anos de busca, de "altos e baixos", com o objetivo de mostrar uma Matemática significativa.

Essa caminhada de 20 anos me trouxe ao curso de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, no qual busco respostas e faço antigos e novos questionamentos sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática.

O foco deste trabalho é compreender o que leva os alunos que estão cursando o Ensino Médio a cometer erros em conceitos trabalhados no Ensino Fundamental.

Para desenvolver essa idéia, foram utilizados nove capítulos, descritos a seguir:

No Capítulo 2 – Objetivos – mostra-se a importância deste estudo e qual sua relevância no ensino.

No Capítulo 3 – O pensamento matemático – é feita uma análise sobre o ato de pensar e aprender. O que o pensamento desenvolve e produz e de que forma pode ser trabalhado em sala de aula. Mostra-se que a Matemática apresenta elementos específicos do pensamento na sua estrutura.

No Capítulo 4 – A linguagem matemática – observa-se que a Matemática possui uma linguagem própria, e é a partir de seus símbolos que o aluno irá se expressar e se comunicar dentro dessa disciplina.

No Capítulo 5 – Teorias cognitivistas – são apresentadas quatro teorias cognitivistas ligadas com a aprendizagem significativa com a preocupação que o aluno avance na suas estruturas cognitivas. São elas: Piaget e o construtivismo, Vigotski e o processo sócio-cognitivo, Vergnaud e os campos conceituais, e Ausubel e o processo de cognição.

No Capítulo 6 – Aprendizagem significativa – é feita uma reflexão sobre tipos e formas de aprendizagem. É dada ênfase à aprendizagem em Matemática e às mudanças necessárias para se ter um ensino melhor.

No Capítulo 7 – Análise de erros – são apresentadas algumas análises de erros cometidos por alunos do Ensino Médio que têm ligação com conteúdos do Ensino Fundamental.

No Capítulo 8 – Metodologia – é apresentada uma descrição dos elementos envolvidos na pesquisa, assim como a linha de pensamento que a norteou.

No Capítulo 9 – Análise dos dados – é feita uma análise dos dados coletados pelo instrumento da pesquisa, os quais foram divididos em três categorias. Alguns dados são cruzados a fim de verificar a relação entre as variáveis das três categorias.

No Capítulo 10 – Conclusões e recomendações – são apresentadas sugestões para trabalhos na mesma área, algumas considerações a respeito do que gostaria de ter feito, mas que não foi possível, assim como as limitações que apareceram durante a pesquisa.

2 OBJETIVOS

O ensino da Matemática feito de forma mecânica e descontextualizado contribui para o mau desempenho dos alunos nessa disciplina. No momento em que o aluno compreende um conceito, esse fará parte da sua estrutura cognitiva, e quando for necessária a sua aplicação na construção de um novo conceito basta que ele busque o que aprendeu e faça essa conexão para construir uma outra estrutura. Mas, caso ele tenha decorado o conceito, essa conexão não será feita, e novas estruturas não serão criadas.

2.1 Importância do estudo

Em 20 anos de prática em sala de aula, como professora de Matemática, tenho observado no trabalho com turmas do Ensino Médio que o aluno, em geral, compreende os conceitos desenvolvidos nessa etapa. Mas, no momento em que ele necessita de algum conceito já trabalhado, surgem dificuldades, sendo então necessária a retomada desses conceitos. Esses problemas levam o aluno a cometer erros, tendo insucesso na disciplina e reforçando os sentimentos negativos em relação a ela. É possível antecipar muitas vezes onde o aluno vai errar. Penso que o aluno não entende, de fato, o conceito, mas que segue regras de forma mecânica e sem significado.

Conceitos não compreendidos ou mal estruturados podem tornar-se significativos quando são reconstruídos de forma que o aluno faça as ligações ou conexões necessárias com outros conhecimentos já adquiridos e de certa forma sedimentados. A aprendizagem se dá nessas conexões, ou seja, é incorporada a nova estrutura à já existente. O mundo dos significados tem origem nesse processo cognitivo.

Antes mesmo de entrar na escola, a criança já lida com conceitos, com o entendimento e com as percepções do mundo que a cerca. A cada etapa vencida, aumenta a quantidade de significados que o conhecimento traz, ou seja, só se tem o entendimento de algo quando ele significa alguma coisa.

Geralmente, os erros cometidos pelo aluno estão diretamente ligados aos conceitos que não tiveram significado ou foram exercitados de forma mecânica e descontextualizada, deixando de lado a parte cognitiva. Isso faz com que ele tenha dificuldades de compreender conteúdos que estejam ligados a este conceito.

Os conteúdos de Matemática trabalhados no Ensino Médio dependem de conceitos trabalhados no Ensino Fundamental. O aluno, ao chegar no Ensino Médio, já deveria ter elaborado o significado de conceitos como: frações, números decimais, porcentagem, radicais, propriedades da potenciação, sistema de numeração, múltiplos, divisores, equações, inequações, sistemas de equações. Por exemplo, ao trabalhar com seqüências numéricas, o aluno compreende com certa facilidade o que vem a ser uma Progressão Aritmética ou Geométrica, mas ao resolver problemas que envolvam essas seqüências, ele esbarra em dificuldades como operações com frações ou nas propriedades da potenciação.

Percebe-se que as frações ou as potências não têm significado para ele, mas isso não impede que ele realize operações com esses objetos através de “receitas” que gravou em modelos que recebeu prontos e acabados. O processo até funciona, mas ele não compreende o que está fazendo e nem porquê o está fazendo dessa ou daquela forma. Falta o entendimento do conceito de fração e a compreensão do que é uma potência. Falta entender o que é uma propriedade.

Um conhecimento deve ter sentido e ser significativo. A Matemática, como área de conhecimento, é necessária como ferramenta para a elaboração de outros saberes. Na escola o aluno recebe informações de diversas áreas. Uma informação só será um conhecimento quando fizer parte das estruturas cognitivas do aluno. Por meio da associação a algo conhecido, se constróem novos conhecimentos.

A Matemática tem uma linguagem e uma estrutura própria formada por uma ampla simbologia repleta de significados. Os conceitos presentes nos conteúdos de Matemática têm uma estrutura lógica que pode atingir diferentes níveis de complexidade, então é possível aprender um conceito, na 5ª série do Ensino Fundamental, que será utilizado em conteúdos trabalhados nas séries do Ensino Médio. O aluno vai precisar fazer as conexões desse conceito nas diferentes etapas de sua vida escolar, aumentando assim o seu conhecimento e abrindo possibilidades para a aprendizagem.

> O professor deve entender os erros específicos de seus alunos como uma informação das dificuldades da Matemática que requerem um esforço para a superação. É importante levar em conta que podemos superar um erro e aceitá-lo não como algo que não deveria ter aparecido, mas sim como algo cuja aparição é útil e interessante, já que permite a aquisição de um novo e melhor conhecimento (ENGLER, GREGORINI, MÜLLER, VRANCKEN, HECKLEIN, 2004, p.28).

A escola, sendo um ambiente de desenvolvimento de saberes e de formação de pessoas criativas, críticas e que tenham autonomia, precisa estabelecer estratégias de ensino que levem o aluno ao sucesso pessoal em todas as áreas possíveis. Quando um aluno comete erros, por exemplo, na disciplina de Matemática, sua auto-estima baixa, e isso pode levá-lo ao desinteresse pelos estudos. Este trabalho pretende verificar via análise se os erros cometidos pelo aluno do Ensino Médio têm relação com a estrutura (ou linguagem) da Matemática e se o erro afeta a relação do aluno com os estudos bem como os seus sentimentos em relação à Matemática.

Este trabalho pretende também fazer uma análise dos erros cometidos pelos alunos do Ensino Médio relacionados com os conteúdos do Ensino Fundamental e tentar identificar suas causas.

2.2 Objetivos

No ensino de Matemática, os conteúdos são trabalhados freqüentemente de forma mecânica, descontextualizada e repetindo modelos prontos, tornando o aluno um mero espectador, um objeto do processo de aprendizagem. Este trabalho tem como objetivo geral: **levantar os erros em questões de Matemática e tentar identificar causas que levam o aluno a cometer esses erros.** Categorias como linguagem matemática, pensamento matemático, simbologia matemática e língua materna são suportes para auxiliar na análise dessas causas.

Pretende-se desenvolver esta pesquisa apoiada nos seguintes objetivos específicos:

- Analisar a relação e a vivência do aluno com a Matemática.
- Identificar dificuldades que levam ao não entendimento de um dado conteúdo.
- Analisar os tipos de erros apresentados na compreensão ou interpretação de um conceito.
- Inferir sobre causas prováveis.

3 SENTIMENTOS E PENSAMENTOS

A Matemática, como forma de pensar, carrega o estigma de ser uma entidade que habita uma esfera superior. Culturalmente, existe em volta da Matemática a idéia de que poucos podem compreendê-la, devido a sua complexidade, ao seu rigor lógico, associado a sua linguagem fechada, apesar de ela estar presente nas ações do dia-a-dia. A forma como ela é desenvolvida nas escolas contribui para manter esta marca. Em geral, ela é ensinada de forma mecânica, cheia de regras, propriedades sem significado, e descontextualizada. É preciso desenvolver o significado e a importância prática da Matemática como área do conhecimento.

3.1 Sentimentos em relação à Matemática

A palavra Matemática é capaz de despertar os mais diferentes sentimentos, desde o horror até o entusiasmo. Estes sentimentos estão diretamente ligados à história escolar ou familiar e às lembranças que se traz dessa disciplina.

O homem sempre esteve e está buscando compreender o mundo à sua volta, e nessa busca a Matemática está presente, pois ela é necessária para calcular, contar, medir. Para interpretar o mundo, ele explora a natureza, tenta entendê-la e busca explicações. Os elementos que o cercam são utilizados na sua sobrevivência, e ao dominar a natureza ele procura simplificar a sua vida, torná-la mais cômoda. Neste processo, a Matemática está presente como uma forma de pensamento que auxilia e facilita a comunicação. Paul Karlson, na “Magia dos Números”, mostra isso de uma forma poética.

> O mundo sempre esteve e está repleto de matemática. Isto nos pode causar admiração, pois o matemático é tido como um indivíduo de óculos espessos, seco, alheio à vida, cujo reino, verdadeiramente, não é deste mundo, mas que se delicia com elipses e hipérboles, com frações e raízes, com logaritmos e integrais, o que é a pura verdade. Mas quando tira seus óculos e esfrega os olhos para passar em revista o céu e a terra, a sua alegria de descobridor não tem fim. No alto dos céus depara com a lua cheia: um círculo perfeito, melhor do que o traçado com o mais caro dos compassos. Vê o cristal de rocha – onde encontrará ele ângulos mais exatos? Nas ondas majestosas do oceano e no movimento pulsativo da água ele vê a imagem do conceito que tem das funções periódicas; a ornamentação cósmica do céu estrelado fornece ao matemático uma riqueza inesgotável de relações geométricas (1961, p.3).

A Matemática, entretanto, nem sempre é vista dessa forma poética, pois carrega o preconceito de ser uma matéria chata, complicada, árida, sem beleza e causadora da reprovação de muitos alunos. Nessa dimensão, ao se buscar o rigor como característica, contribuiu-se para que ela ficasse isolada e até mesmo fosse considerada como uma entidade que habita uma esfera superior.

Como professora de Matemática, ao longo dos anos, conheci muitas pessoas que dizem não saber, não gostar e até mesmo detestar Matemática. Esses sentimentos são adquiridos durante a vida escolar, são crenças e concepções a respeito da Matemática, formadas de acordo com as vivências individuais. Tais vivências foram provavelmente desprovidas de vínculos com a realidade e sem significado prático ou até mesmo teórico. Essas pessoas consideram a Matemática uma matéria difícil e exigente.

Na sua dissertação de mestrado, Thomaz (1996) aponta para esta questão, dizendo:

> que a Matemática é cansativa, que ela tem tanta coisa que eles, até, esquecem, e falaram, ainda, que é preciso paciência, porque para resolver uns problemas demoram horas e para resolver outros demoram dias. Que em Matemática é preciso treinar, constantemente, caso contrário, não conseguem resolver os problemas (p.82).

Quando dizem que têm muitas coisas que esquecem, demonstram memorização e não compreensão. E, ao enfatizar o treinamento, mostram que a visão de aprendizagem que eles têm é mecânica, como se treinar um conceito levasse à compreensão dele e ao desenvolvimento do raciocínio matemático.

“Embora esse não seja o motivo principal, disseram não gostar de Matemática porque tem que se esforçar demais para aprender, tem que raciocinar muito.” (THOMAZ, 1996, p.82)

Como a mesma autora observa, isso pode ser conseqüência de um ensino que, em geral, trabalha com um “conteúdo morto”, que não tem significado e nem desperta interesse. E ela define conteúdo morto como “aquele conteúdo sem luz, sem vida, sem sentido, sem significado, sem conexão viva com a realidade, abstrato demais, que paira no plano estratosférico sem aterrissar nunca.” (THOMAZ, 1996, p.82)

Se os alunos vêem a Matemática como uma ciência formada por conteúdos mortos, então ela só pode ser “chata” e sem graça. Será que é o que os alunos vêem, ou é o que de fato é mostrado a eles? O objetivo não é buscar culpas ou culpados, mas tentar reconstruir essas idéias e desmistificar a Matemática, mostrando que ela é formada por “conteúdos vivos”. Fazendo um contraponto com a definição de conteúdo morto, é possível definir, então, o conteúdo vivo como aquele conteúdo com luz, com vida, com sentido, com significado, com conexão viva com a realidade, abstrato na medida em que faz parte do plano estratosférico, do plano das idéias e que aterriza no momento em que é compreendido.

O aluno, muitas vezes, sente-se o único responsável pela sua dificuldade em Matemática, levando a problemas na sua auto-estima e reforçando a idéia de que Matemática é um conhecimento para poucos. O que não é verdade. É preciso, sim, ser dedicado, querer aprender e estudar muito, pois não se constrói um conhecimento sem esses elementos, e se aliado a isto se tiver um professor que seja também dedicado, goste do que faz e tenha prazer nisso, então o resultado é praticamente garantido, e a aprendizagem será significativa.

Porém, questões afetivas influem no ensino e na aprendizagem da Matemática, e dependendo da relação do aluno com essa disciplina, o seu desempenho escolar pode variar.

Chacón (2003) analisa a influência da afetividade no desenvolvimento cognitivo do aluno:

> A relação que se estabelece entre afetos – emoções, atitudes e crenças – e aprendizagem é cíclica: por um lado, a experiência do estudante ao aprender matemática provoca diferentes reações e influi na formação de suas crenças. Por outro, as crenças defendidas pelo sujeito têm uma conseqüência direta em seu comportamento em situações de aprendizagem e em sua capacidade de aprender (p.23).

Portanto, a relação estabelecida entre o aluno, a Matemática e o ambiente em que ela se desenvolve vai influenciar suas atitudes positivas ou negativas, quanto à ela. O sucesso ou o fracasso do aluno em Matemática pode estar ligado a essas relações.

Carraher, Carraher e Schliemann (1989) afirmam que existe uma grande distância entre como se ensina e como o aluno aprende Matemática. Talvez esse seja um dos motivos que contribui para as atitudes negativas do aluno em relação à Matemática, que não se criaram do nada.

Muitos utilizam essa disciplina como forma de poder, reforçando e mesmo incutindo a idéia de que saber lidar com a Matemática é para poucos. Para desenvolver a Matemática de forma significativa, é preciso que o aluno crie atitudes positivas em relação a ela. Como outras áreas do conhecimento, a Matemática cria oportunidades para pensar. Mas o que nos leva ao pensamento?

3.2 O pensamento

Pensar é uma forma de aprender. Para que o nosso aluno pense, é necessário criar oportunidades para ele desenvolver seu pensamento.

Raths (1977) apresenta uma lista de atividades que dão idéias de como acentuar o pensamento. Essas atividades desenvolvem o pensamento como um todo e podem ser utilizadas nas diferentes áreas do conhecimento. Em cada área, as atividades têm aplicação e auxiliam no desenvolvimento do pensamento específico.

As atividades para acentuar o pensamento são: comparação, resumo, observação, interpretação, crítica, suposição, imaginação, obtenção e organização de dados, hipóteses, aplicação de fatos, decisão, planejamento de projetos e pesquisas e codificação. Essas atividades, dentro do contexto escolar, podem ser utilizadas em atividades de sala de aula, de forma isolada ou conjunta, já que algumas estão interligadas.

Trabalhando essas atividades do pensamento nas aulas de Matemática, pode-se observar o desenvolvimento de elementos como: abstração e a sua conservação, exatidão, precisão, ordenação, análise, síntese; atribuição e negação de sentido às experiências, julgamento, avaliação, criatividade, independência, elaboração de proposições, uso leis e regras, generalização, aplicação de códigos, entre outros.

Raths (1977) apresenta também uma relação de comportamentos que o aluno tem frente ao ato de pensar. São eles: impulsividade (age sem refletir); excessiva dependência com relação ao professor (não pensa sozinho); incapacidade para concentrar-se (não pensa no que está fazendo); incapacidade para ver o significado (não percebe sentido no trabalho); comportamento dogmático e de afirmação (sabe tudo); rigidez, inflexibilidade de comportamento (não aceita formas diferentes de pensar); falta extrema de confiança no pensamento pessoal (timidez quanto à revelação do eu) e falta de disposição para pensar (quer receber tudo pronto).

Esses comportamentos são observados, também, nas aulas de Matemática. Por conseguinte, o professor precisa estar atento para lidar com eles já que poderão prejudicar o desenvolvimento do aluno.

Atento às atividades que acentuam o ato de pensar e aos comportamentos que os alunos têm para realizar esse ato, é possível perceber a complexidade que existe no desenvolvimento do pensamento. No pensar matemático, o professor terá que articular esses fatores e mais os elementos específicos da Matemática.

3.3 O pensamento matemático

O pensamento matemático difere das demais formas de pensamento em algumas peculiaridades. Todas as formas de pensamento desenvolvem o raciocínio, porém o pensamento matemático envolve o raciocínio geométrico, algébrico e analítico, isolados ou integrados, e cada um desses tipos de raciocínio desenvolve modos de pensar em Matemática. Esses modos de pensar desenvolvem capacidades que não são naturais e precisam ser aprendidas. Goldenberg (1998) extraiu da coleção Geometria conectada (Connected Geometry) os hábitos de pensar em Matemática, descritos da seguinte maneira:

- **a tendência para visualizar**: capacidade de criar, manipular e "ler" imagens mentais de aspectos comuns da realidade. O aluno precisa desenvolver a capacidade de visualizar e interpretar informações espaciais e quantitativas.
- **a interpretação de diagramas**: o diagrama é como uma "demonstração visual" de uma relação, por exemplo, algébrica que o acompanha. O aluno precisa compreender esta forma de comunicação.
- **a tendência para descrever, formal e informalmente, relações e processos**: é fundamental saber utilizar uma linguagem informal para dizer com clareza o que as coisas significam. Mas, para exprimir um significado matemático é preciso usar uma linguagem mais formal, com sistemas simbólicos. Envolve uma capacidade para fazer relações (quantitativas, espaciais, hierárquicas ou de inclusão, estruturais, etc.) e detectar processos e conexões lógicas entre idéias, sendo capaz de descrevê-las.
- **a tendência para traduzir informações apresentadas verbalmente em informação visual e vice-versa**: dar o sentido visual a uma situação verbal ou vice-versa mostra um entendimento da linguagem matemática pelo aluno.
- **a tendência para fazer experiências**: quando os alunos fazem explorações e observações, eles podem perceber os fatores independentes de uma situação problema, levando-os a novas conjecturas.
- **a tendência para procurar invariantes**: fazer com que o aluno perceba que a Matemática é feita de padrões, ela trata da procura da estrutura

comum: coisas absolutas ou relativas que permanecem fixas enquanto o que as rodeia ou partes delas variam. De acordo com Goldenberg (2004): “O fato da invariância estar no centro da matemática significa que qualquer conteúdo pode ser usado para ajudar os alunos a criar este hábito de pensamento.”

- **a tendência para misturar experimentação e dedução**: a Matemática não é feita apenas de lógica. Os matemáticos sempre fizeram experiências que os levavam a novas descobertas ou auxiliavam em demonstrações. É possível levar os alunos a ver como traduzir uma experiência em palavras, construindo uma demonstração.

- **a tendência para construir explicações sistemáticas e demonstrações para invariantes observados**: ao fazer uma demonstração, o aluno está mostrando o seu pensamento com clareza e como é possível uma idéia derivar de outras.

- **a tendência para construir algoritmos e raciocinar acerca deles (uma das muitas conexões com a álgebra)**: o aluno deve criar os seus mecanismos de raciocínio para resolver os problemas, deve também analisar o problema e verificar se tem sentido a sua solução, sem se tornar algo específico. É preciso ter cuidado para não generalizar a partir de um único exemplo. O aluno irá construir para si uma imagem mais unificada da Matemática.

Ao desenvolver qualquer conteúdo de Matemática, é preciso estar atento ao tipo de pensamento que se quer desenvolver e que leva o aluno a fazer relações e aplicações. Os pensamentos transcendem os conteúdos, pois o ato de pensar auxilia no desenvolvimento e aprendizagem dos mesmos.

O pensamento matemático trabalhado com o aluno deve ser diferente do pensamento matemático do professor, já que o segundo precisa ter bem estruturados os elementos que compõem o pensamento e o pensamento matemático para servir de mediador entre conhecimento matemático e o conhecimento que estará sendo desenvolvido pelo aluno.

A Matemática é conhecida como uma ciência rigorosa no seu pensamento e na sua linguagem, levando-a a ter um mundo próprio. Essa é uma idéia que acompanhou a Matemática em muitas épocas, mas já faz algum tempo que se busca uma mudança.

Na história da Matemática, verifica-se que ela era estudada por alguns privilegiados, geralmente homens de famílias abastadas ou homens que tinham os estudos financiados por algum nobre ou membro da Igreja. Mulheres de vanguarda em todas as épocas tiveram a sua participação na construção do conhecimento matemático, mas o seu trabalho não aparecia diretamente, pois elas, muitas vezes, necessitavam usar pseudônimos masculinos para que isso pudesse ocorrer. Esses homens e mulheres contribuíram, e muito, para essa Matemática que temos hoje e também ajudaram a criar a cultura de que a Matemática é um tipo de conhecimento destinado a poucos.

Atualmente, a Educação Matemática considera a Matemática como um pensamento analítico, reflexivo, sistemático e universal. Conforme Bicudo e Garnica (2002), a Educação Matemática analisa crítica e reflexivamente, as propostas e ações educacionais relativas ao ensino e à aprendizagem da matemática nos diferentes contextos.

A Matemática evoluiu como pensamento dentro do contexto escolar, e é preciso, portanto, olhar para ela com outros olhos, observando que ela tem beleza na sua estrutura, na sua lógica e nas suas relações. Ela deve e pode ser compreendida por todos, ter sentido e ser utilizada fora do contexto de sua aprendizagem, ou seja, não deverá esgotar-se em si mesma.

> Quando alguém resolve um problema de matemática, estamos diante de uma pessoa que pensa. A matemática que um sujeito produz não é independente de seu pensamento enquanto ele a produz, mas pode vir a ser cristalizada e tornar-se parte de uma ciência, a matemática, ensinada na escola e aprendida dentro e fora da escola (CARRAHER; CARRAHER; SCHLIEMANN, 1989, p.11).

A Educação Matemática apresenta mudanças na forma de ensinar, aprender e pensar Matemática, acarretando mudanças no professor e no aluno. Mudanças ocorrem a todo o momento, novas teorias surgem para complementar ou contrapor outras já existentes. Cada profissional carrega suas concepções, crenças e sentimentos a respeito da Matemática e do seu aprendizado. Adota-se uma prática e segue-se alguma teoria. É preciso refletir a respeito dessa prática para perceber que mudança se faz necessária.

Não é possível fazer Matemática sem levar em conta que aprender Matemática é aprender a usar suas diferentes linguagens – aritmética, geométrica, simbólica, algébrica, gráfica, entre outras, formadoras do pensamento lógico.

Luria (2001) define a respeito do pensamento lógico:

> O pensamento lógico do homem possui códigos múltiplos ou matrizes lógicas que são recursos para realizar conclusões lógicas e que permitem obter novos conhecimentos por um caminho lógico e não empírico. Isto nos possibilita extrair as conseqüências necessárias, tanto das observações, que, com o auxílio da linguagem, se incluem no correspondente sistema de generalizações, como as proposições gerais, que formulam a experiência da humanidade no sistema da língua (p. 204).

A Educação Matemática se apresenta como um movimento de ensino da Matemática que defende o uso de metodologias como: modelagem, etnomatemática, o uso de novas tecnologias, entre outras. Essas metodologias trabalham com a resolução de problemas.

A resolução de problemas vista como uma perspectiva metodológica a serviço do ensino e da aprendizagem da Matemática faz a ligação das exigências científicas com o pensamento humano. Pois, ao resolver um problema, passa-se por vários estágios como: compreensão, análise, tomada de decisão, estratégias de ação, interpretação e domínio da linguagem simbólica própria da Matemática.

Polya (1978) afirma que a resolução de um problema segue quatro etapas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto.

Entretanto, para resolver um problema, é preciso pensar e refletir, ou seja, ter um pensamento reflexivo. O pensamento reflexivo não leva a algo isolado, mas sim ao significado. Esse, por sua vez, não se encerra em si mesmo, nem se resolve com uma definição, mas pode levar a novos significados, ou seja, um conjunto de idéias que juntas fazem sentido. Vygotsky (2003) introduziu os conceitos de significado e sentido para tratar as relações entre linguagem e pensamento.

A maneira de pensar e o método usado vão sempre predominar sobre os conteúdos. O pensamento e o método utilizado na resolução de um problema têm ligação também com o interesse do aluno pela Matemática e pelo conteúdo que está sendo desenvolvido, pois, dependendo da forma como se trabalha os conteúdos ou conceitos matemáticos, será permitido ao aluno pensar sobre o que está trabalhando. A forma vai influir na postura que o aluno tem frente aos problemas relacionados com o conceito. Esse comportamento do aluno apresenta muitas variantes, já que o gostar e o querer estarão diretamente ligados com essa postura. A vontade é algo interno e individual, mas se o conteúdo for apresentado de forma estruturada e vinculado com a realidade do aluno, então é provável que essa vontade apareça.

Ter sentido é ter consciência. Ser significativo é o quando algo quer dizer alguma coisa, ou que pode ser expresso com clareza.

> O significado das palavras é um fenômeno de pensamento apenas na medida em que o pensamento ganha corpo por meio da fala, e só é um fenômeno da fala na medida em que esta é ligada ao pensamento, sendo iluminada por ele. É um fenômeno do pensamento verbal, ou da fala significativa – uma união da palavra e do pensamento (VYGOTSKY, 2003, p.151).

“A educação tem sentido na medida em que possibilite a ampliação da capacidade de pensar” (HERNÁNDEZ, ALVARADO, 2004, p.3).

O pensamento não é algo único, inalterável, automático e aplicado a qualquer objeto. Pelo contrário, o ato de pensar nos leva a refletir, analisar, comparar e ampliar o conhecimento. Isto só é possível quando se faz referência a algo que já é significativo, pois não seria possível fazer relações entre elementos que nos são estranhos. Ao realizar essas relações, vamos construir um conjunto de nexos entre diversos elementos; o pensamento não é só uma representação mental das coisas, é uma construção. O pensamento é construído por indagações que nascem de um problema, e, ao mobilizar o pensamento, criam-se possibilidades de decidir o melhor caminho para resolver este problema. Quanto mais o aluno tiver oportunidade de refletir sobre um determinado assunto, mais ele irá compreendê-lo.

> O pensamento tem seu início em uma situação que muito bem poderia denominar-se “bifurcação de caminhos”, numa situação ambígua, que

> apresenta um dilema, que propõe alternativas... a dificuldade ou a obstrução do caminho que conduz a uma crença nos impõe uma pausa. Na dúvida, na incerteza, subimos metafóricamente em uma árvore, e procuramos algum sinal a partir do qual podemos obter indícios adicionais e assim, com uma visão mais ampla da situação, decidir como se relacionam uns elementos com os outros (DEWEY, apud, HERNÁNDEZ; ALVARADO 1989, p.4).

Quanto mais o aluno analisar e refletir sobre o que, como e por que está aprendendo, mais ele será sujeito de sua aprendizagem, sendo também um ser crítico e consciente do seu saber.

3.4 Conexões do pensamento

Uma questão que parece antiga, mas que ainda está presente entre os educadores matemáticos é a de que a Matemática desenvolve o pensamento e o raciocínio lógico. Mas será só isso? Somente a Matemática tem esse poder? É consenso que o pensamento matemático contribui para o desenvolvimento do raciocínio, pois envolve pensar logicamente, analisar todas as possibilidades. De um modo geral, em termos de conhecimento, o aprendizado de qualquer conteúdo favorece o pensamento lógico, dependendo sempre da forma como ele é abordado.

> Na verdade, o exercício do raciocínio favorece a organização do pensamento, e para isso qualquer tema pode ser utilizado como veículo. O acompanhamento cuidadoso mesmo de um texto de natureza teológica, como é a Suma Teológica, de Santo Tomás de Aquino, pode desempenhar importante papel no desenvolvimento da capacidade de argumentar (MACHADO,1998, p.77).

A organização do pensamento pode ser colocada pela fala ou pela escrita, no caso de um problema matemático irá envolver a linguagem matemática expressa através de sua simbologia.

Por exemplo, numa aula de Matemática pedi que um grupo de alunos resolvesse o problema: “Num retângulo de área de 80 cm², o comprimento tem 11 cm a mais que a largura. Calcule as medidas do retângulo”. A maior dificuldade observada na resolução do problema foi traduzir a frase “o comprimento tem 11 cm a mais que a largura” da linguagem materna para a linguagem matemática. Depois de isto ter sido explicado e fazer sentido, isto é, ter significado, os alunos não tiveram maiores problemas em resolver a questão.

O exemplo ilustra que é necessário buscar qual elemento ou quais elementos fazem com que os alunos não resolvam um determinado problema. No momento em que o problema foi equacionado e foi percebido que se tratava de um sistema, eles conseguiram resolvê-lo sem grandes dificuldades. Uma vez que o modelo esteja pronto, os alunos, normalmente, sabem qual o caminho a seguir para chegar à solução. Entretanto, o problema é anterior a se ter o modelo pronto. É por isso que a principal reclamação dos alunos é que os professores de Matemática colocam nas provas “coisas” que eles nunca viram antes. Eles não percebem que, se, de fato, o conceito foi entendido, então ele poderá ser utilizado em qualquer situação. Mas não é, geralmente, o que acontece; os alunos afirmam isso por não “enxergar” nas avaliações aquele modelo pronto que ele estava acostumado a utilizar. Isso mostra que ele não está pensando sobre o exercício proposto, mas está tentando identificar algo que ele treinou anteriormente. Percebe-se, dessa maneira, que o aluno ainda não construiu o seu modo de pensar, que ele simplesmente resolve as questões de forma mecânica.

Para desenvolver o pensamento matemático, incluindo o raciocínio e a lógica, é preciso que se construa o conhecimento de novos conceitos, fazendo a ligação com conceitos já conhecidos e que tenham sentido e significado. O pensamento matemático, não sendo natural, necessita fazer essas conexões entre estruturas cognitivas para formar um novo pensamento.

3.5 Comunicação Matemática

Se de fato o aluno compreende um conceito, ele fará as conexões necessárias para atingir novos conhecimentos, deixar as resoluções mecânicas e elaborar suas formas de pensar.

Permitir que o aluno expresse o seu pensamento matemático de diversas formas é dar oportunidade para que ele elabore com mais clareza o raciocínio que está fazendo para solucionar uma questão. É permitir, também, que ele se comunique via linguagem simbólica. E fazer com que ele construa suas próprias soluções e não fique apenas dependente do pensamento do professor. Seguir o raciocínio do professor faz do aluno um objeto de sua aprendizagem; já que ele está recebendo tudo pronto, ele não precisa pensar.

Ao expor o seu pensamento matemático, o aluno estará refletindo e argumentando sobre o seu entendimento, sua forma de pensar e organizar as idéias matemáticas. A comunicação do significado leva à origem da aprendizagem.

A comunicação matemática é feita através de símbolos que auxiliam a organizar e guiar o pensamento. Esses símbolos passam a fazer parte de uma nova linguagem com a qual o aluno vai construir novos significados, que farão parte das discussões nas salas de aula. “Além de possibilitar a comunicação, os símbolos também sustentam o pensamento individual. Registros adequados auxiliam os estudantes a lidar com idéias complexas, a organizá-las e manipulá-las mentalmente” (GOLBERT, 2002, p. 26).

Para se comunicar e pensar com clareza, o aluno precisa ter oportunidades, nas quais poderá refletir sobre os termos matemáticos que usa. Ver o contexto em que esses termos estão inseridos afeta o significado. Dependendo da posição do termo, o significado será diferente. Por exemplo, o dois (2) tem significados completamente diferentes em **sen (2x)** e **2 sen x**.

A possibilidade de se poder encadear os pensamentos coerentemente demonstra clareza e mostra como uma idéia deriva de outras. Haverá comunicação se houver compreensão. Na Matemática, é possível fazer comunicações através de demonstrações, as quais seguem o processo de um pensamento coerente e encadeado.

O fato de o aluno não poder se comunicar matematicamente demonstra a falta de entendimento da Matemática e de seus modos de pensar. Criando-se oportunidades de comunicação, elas levarão os alunos a explorar, organizar e conectar seus pensamentos, o que poderá desencadear uma real aprendizagem e novos conhecimentos.

3.6 Fechamento

Desenvolver sentimentos positivos em relação à Matemática influi na relação do aluno com essa disciplina, pois fica mais simples aprender algo de que se gosta. O aprender está ligado com o pensar. Portanto, o desenvolvimento do pensamento, nas mais diversas áreas, auxilia no desenvolvimento específico de cada uma.

Ao aprender Matemática, o aluno pensa de forma algébrica, aritmética e geométrica, entre outras. E em cada uma delas estabelece relações, faz conexões e se comunica simbolicamente. Nesse processo, o professor é um elemento essencial, pois depende muito dele a forma de dirigir o conhecimento matemático do aluno e a formação do seu pensamento. Tudo isso dirigido à expectativa de que o aluno levante idéias matemáticas, estabeleça relações entre tais idéias, saiba escrever e falar sobre elas, desenvolva sua própria forma de raciocínio, a capacidade de resolver problemas, e uma linguagem mais formal, com sistemas simbólicos, pelos quais expresse o seu pensamento matemático.

4 A LINGUAGEM MATEMÁTICA

A Matemática repleta de símbolos e regras se apresenta com uma linguagem própria, na qual essas regras e esses símbolos combinados têm sentido e significados dentro de um contexto. Saber lidar com esta linguagem é mostrar-se portador de habilidades específicas para ler, escrever e se comunicar por meio dela, expressando idéias que seguem um processo para chegar a um produto final. Esse processo é formado por elementos internos e externos, que tem variações, não se apresentando de forma estanque e acabada.

Toda linguagem é formada sobre uma estrutura com regras, conceitos, definições e características próprias e pode ser apresentada de maneira formal ou informal, dependendo da situação, respeitando o seu rigorismo.

4.1 Matemática como habilidade

Compreender o significado matemático envolve perceber que a Matemática tem linguagem própria, é como se aprendêssemos a falar, a ler e a nos comunicar em outra língua. Comparar a matemática com o falar é fundamental, como diz D'Ambrosio (1986):

> [...] o fato de a matemática ser uma linguagem (mais fina e precisa que a linguagem natural) que permite ao homem comunicar-se sobre fenômenos naturais, conseqüentemente, ela se desenvolve no curso da história da humanidade desde os "sons" mais elementares, e portanto intimamente ligada ao contexto sociocultural em que se desenvolve – por isso falamos em matemática grega, matemática hindu, matemática pré-colombiana (p.35).

A Matemática hoje é tanto uma ciência e desenvolve habilidades necessárias no dia-a-dia. Mas só se percebe a sua presença quando, dentro de um contexto, ela tem significado, quando ela diz alguma coisa. Na escola, Matemática, Português, História e Ciências entre outras, são disciplinas diferentes com estruturas próprias, mas também com elementos comuns dentro dessa estrutura. A Matemática pode ser trabalhada de forma isolada na construção de conceitos que dão suporte para novos conceitos dentro dela mesma, mas também é possível trabalhá-la de forma contextualizada com outras disciplinas, mostrando a sua aplicabilidade em outras áreas do conhecimento. Portanto, é preciso pensar formas diferenciadas de trabalhar os conceitos da Matemática, o que só é possível buscando novos modelos de ensinar e aprender.

As ciências, em geral, passam por momentos difíceis, tendo seus paradigmas contestados, suas certezas abaladas, suas verdades desacreditadas. Estaria a Educação Matemática passando por uma crise? As crises geralmente servem para repensar, para refletir e para superar momentos difíceis, buscando novos paradigmas, novas verdades, novas certezas. Thomas S. Kuhn (2000) chama isto de revolução científica, já que a sua teoria enfatiza o caráter revolucionário do próprio progresso científico. Para ele, esse progresso se dá de uma forma não linear. Sua teoria explica essa revolução usando quatro termos: “paradigma”, ”ciência normal”, “anomalia” e “revolução”.

Um paradigma representa uma estrutura mental que serve para classificar o real antes do estudo ou investigação mais profunda. A ciência normal é o período em que se atua dentro de um paradigma que é defendido por uma comunidade científica. As anomalias são problemas que o paradigma não consegue resolver. Quando as anomalias ultrapassam o controle, instala-se uma crise que só será resolvida com um novo paradigma. Chega-se, então, à revolução científica, ou seja, muda-se a forma de se olhar o real e cria-se um novo paradigma. Após a adoção de um novo paradigma, transcorre um período de ciência normal até que uma nova crise se instale.

Borges (1996) afirma a respeito da teoria de Kuhn:

> A adesão a um paradigma caracteriza períodos de ciência normal, intercalados por períodos de crise: as revoluções científicas. Uma crise ocorre quando as investigações sobre um determinado aspecto da teoria aceita falham repetidamente, concentrando-se as investigações nesse campo. Assim surgem as novas teorias, a partir de anomalias amplamente conhecidas. O conhecimento dessas anomalias só pode surgir num grupo que sabe muito bem o que teria acontecido, de acordo com a teoria vigente (p.32).

O professor precisa desenvolver no aluno a linguagem matemática de forma que ela se torne natural. Para isso, o professor precisa perceber que o paradigma em que está atuando necessita ser modificado, pois a Matemática que ele trabalha, considerada uma ciência normal e defendida na comunidade científica, apresenta anomalias dentro da escola. A Educação Matemática entra como novo paradigma, criando situações de ensino e aprendizagem através de vivências contextuais e amenizando os problemas da Matemática formal trabalhada na escola.

A Matemática é apresentada de duas formas distintas: uma científica e outra pedagógica. De acordo com Bicudo e Garnica (2002) o discurso científico da Matemática aparece em pesquisas e na construção do conhecimento matemático que são feitos por seus profissionais, que futuramente apresentam suas produções para uma comunidade científica, para depois divulgar seus resultados em textos radicalmente formalizados. Os mesmos autores afirmam que o discurso pedagógico da Matemática faz parte da Educação Matemática que irá interagir nas posturas, metodologias, didáticas, textos escritos e falados, existindo ligação entre estes elementos.

Os autores concluem que: “ambos os discursos pautam-se na construção do conhecimento matemático plasmada na comunicação, na negociação oral de significados e na mediação desempenhada pelo texto escrito” (p.45).

Mudar de discurso ou defender discursos diferentes, como diz Kuhn (2000), é uma revolução que não se dá de um dia para o outro:

> Uma nova teoria, por mais particular que seja seu âmbito de aplicação, nunca ou quase nunca é um mero incremento ao que já é conhecido. Sua assimilação requer a reconstrução da teoria precedente e a reavaliação dos fatos anteriores. Esse processo intrinsecamente revolucionário raramente é completado por um único homem e nunca de um dia para o outro (p. 26).

A Educação Matemática é vista como revolução no sentido da construção de saberes significativos que só se tornam possíveis perante mudanças de paradigmas.

Bicudo e Garnica (2002), em relação à Educação Matemática, defendem que:

> Educação Matemática será, pois, expressão vaga se não for concebida como preenchendo-se, reflexiva e continuamente, dos significados que vêm da prática. A Educação Matemática dá-se como uma reflexão-na-ação. Ação que ocorre num contexto no qual vivemos com o outro: compartilhando vivências (p.40).

Para essa revolução, elementos são analisados na tentativa de compreender os fatores que levam o aluno a não perceber a Matemática como uma linguagem estruturada para expressar idéias, conceitos e, também, a não entender os seus mecanismos de funcionamento.

O analfabetismo matemático ocorre quando o aluno não consegue desenvolver o mínimo de habilidade matemática. Isto significa conhecer e distinguir os números e talvez as quatro operações aritméticas, mas ser incapaz de uma análise crítica ou de tirar conclusões a partir de informações numéricas. Será que isso acontece pela forma com se ensina Matemática nas escolas? Na maioria das vezes, o ensino é pautado num trabalho mecânico, descontextualizado, sem significado e repleto de técnicas operatórias, resolução de exercícios, memorização de fórmulas e propriedades.

> Os dados do INAF (Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional) vêm sendo largamente divulgados pela imprensa, chamando a atenção do grande público para as conseqüências dos déficits de escolarização da população brasileira, fomentando o debate sobre o significado das aprendizagens escolares e para as possibilidades de se continuar aprendendo ao longo da vida, numa sociedade que exige dos trabalhadores e dos cidadãos a capacidade de se reciclar e atualizar continuamente (FONSECA, 2004, p. 9).

Estar alfabetizado em Matemática requer que o aluno entenda o que lê e o que escreve, buscando o significado do ato de ler e escrever dentro da Matemática.

4.2 O rigor na linguagem

A comunicação pode ser feita nas mais diversas formas, sendo algumas naturais (linguagem materna) e outras construídas (linguagem matemática). Os seres humanos possuem habilidades diferentes e elegem suas preferências, mas todos podem desenvolver tipos de linguagens variadas para, por meio delas, poder interpretar, explicar e analisar o mundo. Em especial, a Matemática, como linguagem, tem o caráter de universalidade, assim como a música, a arte e outras manifestações culturais. Essa universalidade da linguagem matemática mostra a sua utilidade na comunicação. Existem algumas verdades incontestáveis na Matemática, D’Ambrósio (2001, p.74) afirma que: “Não se discute que ‘2 + 2 = 4’, mas sim sua contextualização na forma de uma construção simbólica que é ancorada em toda uma história cultural".

A Matemática caracterizada pelo rigor de linguagem é isolada num mundo à parte. Porém, este rigor faz parte dessa linguagem, o que não fortalece a idéia de que rigor seja o mesmo que dificuldade. É preciso sim, compreender essa linguagem formada de símbolos que são elementos de comunicação, ou ainda, de acordo com Imenes e Lellis (1998), sinais gráficos que representam uma idéia matemática.

Ler e escrever não são exclusividade da língua materna. Existem outras formas de interpretar, explicar e analisar o mundo. A Matemática é uma dessas formas: tem seus códigos e sua linguagem; tem um sistema de comunicação e de representação da realidade construído ao longo de sua história. A linguagem matemática desempenha um papel significativo dentro da Matemática e necessita do apoio da linguagem materna para a comunicação das idéias.

O desenvolvimento do simbolismo algébrico se deve a François Viète (1540 – 1603) considerado o maior matemático francês do século XVI. De acordo com Eves (2002), foi Viète que introduziu a prática de se usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes.

A introdução da linguagem simbólica na resolução de problemas é algo recente e foi realizada com a colaboração de outros matemáticos, portanto não foi construída de um dia para o outro, e é preciso maturidade e empenho para a compreensão da mesma. Dessa forma, a Educação Matemática na perspectiva de estruturar um novo currículo para o desenvolvimento da Matemática precisa desenvolver no aluno capacidades e habilidades para lidar com a linguagem dessa disciplina.

As linguagens materna e matemática utilizadas em sala de aula nas formas oral e escrita, quando não são colocadas de forma clara e objetiva, trazem prejuízo para o aluno. Elas devem ser claras e exatas para evitar conclusões errôneas. Isto pode se observado no exemplo apresentado por Kline (1976): '"Mary gastou doze centavos por dois lápis", depois pergunta, "Quanto ela gastou com cada lápis?"' A maioria das pessoas responderia seis centavos porque admitiria, na falta de outras informações, que os dois lápis são iguais. Não havia nenhuma declaração explícita de que os lápis eram iguais. É uma questão simples, mas que pode ser interpretada de forma errada, se não houver cuidado com a linguagem. A escrita, sendo clara, auxilia na elaboração de pensamentos também claros e resoluções corretas. Discutir essas questões de linguagem com o aluno contribui para que ele desenvolva o hábito de estar atento ao real significado de cada palavra dentro de um problema e se torne mais independente na resolução do mesmo.

Quantas vezes o aluno não resolve um problema por não saber o que está sendo perguntado. Então, onde reside essa dificuldade? Na língua materna, na linguagem Matemática ou na própria Matemática?

Existe, então, a necessidade de analisar a relação entre a língua materna e a linguagem matemática, pois o não entendimento de um problema matemático poderá estar ligado ao não entendimento da própria língua ou ao desconhecimento de alguns vocábulos utilizados.

> A comparação que fazemos entre a linguagem natural e a linguagem da Matemática, em que apontamos similitudes, apresenta, como é fácil de adivinhar, diferenças marcantes. Desde logo, porque a linguagem matemática não se aprende a falar em casa, desde tenra idade – aprende–se, isso sim, a utilizar na escola. A aprendizagem da matemática apresenta, também, diferenças quando comparada com a aprendizagem de uma segunda língua natural – que habitualmente também ocorre numa escola – pois não encontramos, no dia-a-dia, um grupo de falantes que a utilize, em

> exclusividade, para comunicar. A linguagem da matemática carece pois do complemento de uma linguagem natural (MENEZES, 2004, p.3).

A linguagem matemática não é natural como a língua materna. A criança aprende a falar e se comunica com os outros por meio da língua materna. A criança aprende a contar imitando o adulto, mas para entender a seqüência dos números naturais, por exemplo, ela precisa estabelecer alguns conceitos e estruturas que não são naturais à língua materna. A linguagem matemática é construída e precisa da língua materna nessa construção.

O rigor com as linguagens materna e matemática torna-se necessário para não desenvolver conceitos errados ou não induzir o aluno ao erro ou à falta de entendimento de alguma questão. As duas linguagens precisam ser claras para que o encadeamento seja perfeito e permita a análise completa do problema.

Machado (1998) reforça esta idéia:

> [...] mesmo as tentativas mais singelas de iniciação à Matemática pressupõem um conhecimento da Língua Materna, ao menos em sua forma oral, o que é essencial para a compreensão do significado dos objetos envolvidos ou das instruções para a ação sobre eles. Tal dependência da Matemática em relação à Língua Materna não passa, no entanto, de uma trivialidade, com a agravante de ser inespecífica, uma vez que se aplica igualmente a qualquer outro assunto que se pretenda ensinar (p.15).

Cada forma de linguagem apresenta suas dificuldades específicas, portanto pode-se impedir que o não entendimento de uma linguagem prejudique a compreensão da outra, o que já é uma forma de minimizar essas dificuldades e então partir para as dificuldades específicas da primeira.

A Matemática carrega consigo alguns estigmas, como o de ser uma disciplina árida, difícil, destinada à compreensão de poucos. Esse problema parece ser cultural, pois a Matemática é vista como vilã, e uma vez que o preconceito se instaure, ele acaba sendo passado adiante. Isto incomoda aqueles que conseguem percebê-la de outra forma.

> A beleza da Matemática é o que está por detrás dos números, o que está além da sua aparência árida, rígida, exata, lógico-dedutiva, é o "espírito" da Matemática, é sua essência, que nos possibilita movimentar suas estruturas, dando-lhe sentido e significado. Portanto, enxergar a beleza do conhecimento, não apenas matemático, é poder desvelar o aparente, tirando-lhe o véu para encontrar a essência (THOMAZ, 1996 p.109).

O elemento essencial é a forma significativa ou não que a Matemática tem para cada um, o que vai depender de como a relação entre o sujeito e a Matemática foi estruturada desde os seus primeiros contatos. Ou ainda, como ela foi apresentada. "É a forma de abordagem dos diferentes assuntos que distingue as diferentes propostas, dando-lhes cor e substância" (MACHADO 1998, p.22).

Para modificar esta cultura, são necessárias mudanças concretas, dando ao professor instrumentos para rever sua prática pedagógica, fazendo com que a aprendizagem matemática seja vista de forma tão natural quanto a da língua materna.

4.3 Os conceitos e as definições

Buscar entender o significado de um conceito matemático no aluno envolve saber como ele vê a Matemática, o que é Matemática para ele e como ele lida com a linguagem matemática. Talvez seja necessário analisar se ele percebe a matemática como uma linguagem. Como afirma Devlin (2004, p. 27), "O problema é profundo, tendo a ver com a capacidade cognitiva do ser humano. O reconhecimento de conceitos abstratos e o desenvolvimento de uma linguagem adequada são dois lados de uma mesma moeda".

Pais (2001) apresenta a complexidade no desenvolvimento de um conceito:

> Os conceitos são idéias gerais e abstratas desenvolvidas no âmbito de uma área específica de conhecimento, criados para sintetizar a essência de uma classe de objetos, situações ou problemas relacionados ao mundo-da-vida. Entretanto, a singularidade dessa frase não é suficiente para expressar a totalidade do que seja um conceito e nem mesmo pode ser interpretada como uma tentativa de definição. Para aproximar dessa possibilidade, seria preciso percorrer um longo e sinuoso caminho, praticando uma permanente circularidade evolutiva através de sucessivas interpretações e compreensões (p. 55).

Portanto, um conceito está em um processo de permanente construção, buscando ser objetivo e universal, mas sem, como afirmado por Pais (2001, p. 55), "considerá-lo uma entidade acabada, tal como concebido por uma visão platônica".

Devlin (2004) observa que a Matemática e a língua materna têm as mesmas características no cérebro humano, então porque as pessoas têm facilidade em entender o que as outras estão falando, mas têm dificuldades de entender a Matemática?

"Ler" Matemática não é simplesmente saber o significado de cada símbolo, já que a notação matemática não é Matemática, assim como a notação musical não é música. Devlin (2004) expõe isto de uma forma clara:

> Uma página de partitura musical representa uma peça de música, mas a notação e a música não são a mesma coisa; a música propriamente dita acontece quando as notas da página são cantadas ou tocadas por um instrumento musical. É no seu desempenho que a música vem à vida; ela existe não na página mas nas nossas mentes. O mesmo é verdade para a matemática. Quando lidos por um executante competente (isto é, alguém versado em matemática), os símbolos da página impressa vêm à vida – a matemática vive e respira como uma sinfonia abstrata na mente do leitor (p.27).

Ninguém escreve as notas de uma música e depois toca para “ver” como a música ficou. A idéia e o desenvolvimento estão na cabeça do compositor. Ele imagina e formaliza o caminho aonde quer chegar, para depois fazer o registro em notação musical e documentar o que imaginou.

A Matemática funciona de forma semelhante, pois ao resolver um problema o aluno analisa, organiza o seu pensamento para depois passar para o papel, em notação matemática, um caminho que por ele foi visualizado para solucionar a questão. Essa simbologia tanto musical como matemática é apenas uma forma de escrita, que só terá sentido se as combinações desses símbolos tiverem algum significado para quem os estiver lendo. Lidar com símbolos não é algo simples e leva um certo tempo para ser estruturado.

> O próprio fato de o simbolismo ter entrado na matemática até certo ponto significativo por volta dos séculos dezesseis e dezessete indica que não vem sem dificuldades para as pessoas. O simbolismo pode servir três propósitos. Pode comunicar idéias eficazmente; pode ocultá-las, e pode ocultar a ausência delas (KLINE, 1976, p.94).

O propósito pelo qual e para o qual se usam símbolos na Matemática é que a diferença no significado que se quer atingir ou, até mesmo, o significado que tem para cada um em particular.

Van Engen (1953, apud BRITO, 2001, p. 78,79) assinala a existência de três dimensões para o conceito de significado. Ele faz um comparativo, analisando a idéia de que as palavras e os símbolos não são sempre empregados da mesma maneira, isto é, o significado tanto de um símbolo como de uma palavra vai depender da maneira pela qual são relacionados entre si e com outros elementos, ou seja, depende do contexto em que se encontram.

As três dimensões são:

Dimensão sintática: é a maneira em que as palavras ou símbolos são usados em uma sentença ou fórmula matemática. Por exemplo, o “2” usado na equação “$x^2 + 5 = 8$” possui um significado diferente do usado na equação “$2x + 4 = 11$”. Um exemplo relativo ao uso de palavras: “Ela nada muito bem” e “A lição não serviu para nada”.

Se o aluno não tiver o domínio dessa linguagem simbólica e não perceber as suas diferenças em termos de significado ele estará resolvendo questões de forma mecânica, sem significado e sem condições de analisar.

Dimensão pragmática: faz referência aos significados que cada palavra ou símbolo tem em relação às vivências e experiências individuais. O autor afirma que nesta dimensão estão incluídas as atitudes em relação à Matemática, já que experiências ruins do aluno nas aulas de Matemáticas ou com um professor que utiliza a disciplina como forma punitiva (resolver listas intermináveis de exercícios) acabam levando o aluno a ter atitudes negativas em relação a essa disciplina.

Dimensão semântica: faz referência às várias transformações do significado. É a dimensão mais abrangente e tem ligação com as outras duas, pois se o aluno entende a linguagem simbólica e tem experiências positivas em relação à Matemática nas suas aulas e com seu professor, então essa disciplina terá significado para ele. Esta dimensão faz referência aos vários significados que um conceito pode ter em diferentes contextos.

Brito (2001), referindo-se à dimensão semântica, afirma que: “O professor é constantemente solicitado a usar os conceitos de maneira contextualizada, mas ele necessita, antes, estabelecer o significado da palavra ou símbolo quando usados de forma isolada”.(p.78)

Os exemplos ilustram a dimensão semântica, observe o "x" em diferentes situações:

a) $3x + 1$, x pode ser qualquer número real

b) $3x + 1 = 4$; x só pode ser igual a 1

c) $\frac{1}{x}$; x pode ser qualquer número real menos o zero

d) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$; x pode ser qualquer número real

e) $x^2 + 4 = 0$ não existe valor de x real que satisfaça a igualdade

O significado do símbolo x nos exemplos acima varia de exemplo para exemplo, dependendo da maneira como é usado em conexão com outros símbolos. O aluno precisa estar ciente do significado de cada símbolo e o que ele representa em cada situação.

Brito (2001) mostra a importância na aquisição do significado dos conceitos:

> A aquisição de conceitos e dos significados dos conceitos é fundamental para a aprendizagem escolar uma vez que a maioria das atividades em sala de aula está baseada na aquisição de conceitos que serão, posteriormente, utilizados para a aprendizagem de princípios e na solução de problemas. Na aprendizagem de conteúdos escolares, as atitudes dos alunos em relação às disciplinas também exercem considerável influência (p.79).

Portanto, para entender como a Matemática é processada pelo aluno, é preciso perceber de que maneira ele faz a leitura dos símbolos e suas conexões com outros elementos. É preciso estabelecer uma comunicação entre professor-aluno a fim de permitir que o aluno expresse a leitura que ele está fazendo da Matemática, compreendendo, então, o significado que os símbolos produzem na sua mente.

Pais (2001) afirma que:

> aprender o significado de um conceito não é permanecer na exterioridade de uma definição, pois a sua complexidade não pode ser reduzida ao estrito espaço de uma mensagem lingüística. Definir é necessário, mas é muito menos do que conceituar, porque o texto formal de uma definição só pode apresentar alguns traços exteriores ao conceito. Por exemplo, a definição de uma figura geométrica, por si só, não pode traduzir a essência do conceito correspondente(p.56).

Os conceitos trabalhados na escola precisam ter sentido, para que o aluno compreenda o seu significado e o seu uso na prática. Moysés (2000) afirma que “o saber da escola, ao que parece, anda na contramão do saber da vida”, pois não se percebe uma continuidade do que se aprende na escola com o conhecimento que existe fora dela. O reconhecimento de que a Matemática raramente é ensinada da forma como é praticada tem levado estudiosos a rever esse ensino. Vygotsky já dizia que a aprendizagem dos conceitos deveria ter suas origens nas práticas sociais.

> O significado de uma palavra representa um amálgama tão estreito do pensamento e da linguagem, que fica difícil dizer se se trata de um fenômeno da fala ou de um fenômeno do pensamento. Uma palavra sem significado é um som vazio; o significado, portanto, é um critério da “palavra”, seu componente indispensável. Parecia, então que o significado poderia ser visto como um fenômeno da fala. Mas do ponto de vista da psicologia, o significado de cada palavra é uma generalização ou um conceito. E como as generalizações e os conceitos são inegavelmente atos de pensamento, podemos considerar o significado como um fenômeno do pensamento (VYGOTSKY, 2003, p.150).

“Uma palavra sem significado é um som vazio”. Esta frase reflete a realidade de muitas aulas de Matemática, onde conceitos são trabalhados de forma mecânica e sem significado, sobrando, então, o vazio.

4.4 Relacionamento com a Matemática

Na Matemática, ao resolver um problema, deve-se associá-lo a uma situação do cotidiano ou às outras áreas do conhecimento. Ao resolver o problema, o aluno passa por um processo que envolve a língua materna, que é uma significação externa, num primeiro momento, para depois chegar à solução do problema obtendo a significação interna. Ele entende o problema (movimento externo) para então elaborar a solução (movimento interno). Esse elo externo-interno precisa ser completo para que ocorra a aprendizagem matemática. Ao transformar o significado externo em interno, o aluno está lidando com seu poder de síntese.

A aprendizagem irá ocorrer quando se obtiver uma compreensão completa do significado, e isto inclui o entendimento externo que vem da interpretação do problema e o entendimento interno que vem da elaboração do problema. Esses dois significados não ocorrem de uma única forma, pois existem várias maneiras de se resolver um mesmo problema.

O sentimento das pessoas em relação à Matemática é formado de extremos, ou seja, ela é amada ou é odiada, não existe o meio termo. Esse sentimento está ligado às experiências com a Matemática e o seu entendimento, pois, no momento em que se compreende o conceito, sua lógica e sua aplicação, é possível que a impressão negativa desapareça.

O conceito fica claro no momento em que o cérebro faz conexão com o que se está lendo, quando vê os símbolos e eles unidos têm um encadeamento perfeito, é o momento em que o rosto se ilumina, o olhar fica brilhante, é possível perceber que agora tem sentido, tem significado. E uma vez entendido de fato, estará entendido para sempre. Fecha-se o ciclo da significação externa e interna.

> As marcas doem quando ainda não estão cicatrizadas porém a marca em si não é importante, o que importa é que a ferida fique curada de dentro para fora e bem cicatrizada, porque as marcas fazem parte das experiências vividas, são na verdade VIDA (THOMAZ, 1996, p.110).

A relação com a Matemática começa bastante cedo, pois é possível observar a noção de senso numérico em crianças numa idade bem precoce. Mesmo antes de ingressar na escola, as crianças têm muitos contatos com a Matemática. Nesses momentos, ela se apresenta de forma lúdica. Deve ser cautelosa a forma de apresentar a Matemática para a criança, para que no futuro essa relação inicial reflita na aprendizagem de estruturas mais complexas.

4.5 Linguagem e comunicação

A comunicação é um elemento presente na sala de aula, o ato de ensinar e aprender está diretamente ligado com a comunicação. Stubbs (1987, apud MENEZES, 2004) afirma que “ensinar e aprender confundem-se com a própria comunicação”. Portanto, é necessário refletir sobre a qualidade da comunicação que está sendo feita nas salas de aulas. É preciso saber se o professor e o aluno estão “falando a mesma língua”, pois só assim ocorrerá a comunicação.

Tendo a Matemática uma linguagem própria, com uma vasta simbologia, para que ocorra uma comunicação é preciso que, quando o professor falar de Matemática na língua materna, o aluno faça essa codificação, transforme a língua materna na linguagem matemática. Ao resolver um problema, o aluno usará a simbologia matemática, que é a sua linguagem, sua forma de expressar uma maneira de pensar. Se todo esse processo se der de forma satisfatória, pode-se admitir que houve uma comunicação. O aluno fará as conexões para aquisição de novos conhecimentos. Esse é, portanto, o desafio na sala de aula: que aconteça a comunicação. Conforme Menezes (2004, p. 1), “a linguagem é um aspecto central em todas as atividades humanas e em particular nas aulas”. E essa linguagem é o elemento central da comunicação, ela é um meio de comunicação.

Imaginemos um professor que propõe em sala de aula, por exemplo, que o aluno calcule **sen 2025°**. Nessa questão está envolvida uma quantidade de conceitos a respeito da trigonometria que o aluno precisa conhecer para poder respondê-la de forma significativa, pois é possível ele decorar a seqüência de regras e passos para chegar ao resultado.

O professor apresenta a questão, o aluno lê o problema, decodifica, passa para a linguagem matemática e retorna a resposta para o professor. A comunicação só será perfeita se todas as etapas expostas acima tiverem sentido para o aluno. Esse sentido estará ligado à forma como o professor, neste caso, trabalha a trigonometria. É um assunto que agora é comum ao professor e ao aluno. Menezes (2004, p. 2) mostra que podemos entender a palavra “comunicar” em dois sentidos: no sentido etimológico, será “tornar comum” e no outro, numa acepção mais corrente, significa “transmitir” ou “transferir para o outro”. Nos dois sentidos, é possível perceber como a relação entre professor-aluno pode facilitar ou não essa comunicação, já que o meio é um elemento importante para que ela ocorra com clareza.

4.6 Fechamento

Se o aluno perceber que, ao aprender Matemática, está desenvolvendo uma habilidade que lhe será útil na construção de novos conceitos, isto vai torná-la mais agradável e com sentido. A Matemática tem uma linguagem própria, rigorosa, e apresenta algumas verdades que são absolutas em termos contextuais, porém a forma de lidar com essas verdades é que fará toda a diferença. Lidar com novos paradigmas leva um certo tempo e contribui com a reflexão. A língua materna tem uma forte relação com a linguagem matemática, essa se encontra entre símbolos e palavras, pois dependendo da posição onde se encontram em uma frase ou expressão, o seu significado é diferente. O aluno irá lidar com os símbolos de forma significativa, o que fará dele um possuidor de outra forma de comunicação, e por meio da linguagem matemática ele irá expressar idéias.

5 TEORIAS COGNITIVISTAS

Existem algumas teorias de educação que trabalham com a idéia de um ensino significativo, são as teorias cognitivistas. Essas teorias se preocupam em entender como o ser humano aprende, organiza e dá significado ao seu mundo real, de forma natural e cultural, além de buscar conceber as estruturas gerais do pensamento.

Teorias como a de Piaget, Vygotsky, ou ainda, a teoria dos campos conceituais de Vergnaud ou a teoria de Ausubel têm suas similaridades e também alguns elementos bastante pontuais.

5.1 Piaget e o construtivismo

Piaget, analisando o comportamento de crianças durante mais de 50 anos, conclui que cada criança constrói, ao longo do processo de desenvolvimento, o seu próprio modelo de mundo. Goulart (1983) observa que as chaves principais do desenvolvimento mental da criança são:

> a) A própria ação do sujeito.
> b) O modo pelo qual isto se converte num processo de construção interna, isto é, de formação dentro de sua mente de uma estrutura em contínua expansão, que corresponde ao mundo exterior (p.11).

A sua teoria refere-se à natureza e ao desenvolvimento do ato de pensar, ou melhor, fornece um critério para o pensamento. E ele mostra isso por meio de atividades em sala de aula nas quais justifica os quatro estágios do desenvolvimento cognitivo: o sensório-motor, o objetivo-simbólico, o de operações concretas e o de operações formais. Piaget trabalhava com atividades práticas, observava as reações das crianças em de situações criadas e solicitava a explicação de quem estava sendo observado. Era possível identificar as operações lógicas e as estruturas mentais das crianças em cada estágio. Goulart (1983, p.17) reforça que: "o uso dos resultados dessa observação permite diagnosticar a prontidão para a aprendizagem verbal, quantitativa, espacial, algébrica, e, conseqüentemente, propor o ensino adequado".

Piaget concluiu que cada criança vai construindo o seu modelo de mundo a cada etapa do seu desenvolvimento. E cada etapa é fundamental para atingir outra, a criança só constrói um modelo mais evoluído se experienciou e criou seus próprios modelos. Essas são as conexões feitas pela criança para adquirir um novo conhecimento, ou seja, a criança só irá aprender se conseguir criar mecanismos para relacionar as informações contidas no aprendizado. Furth e Wachs (1979, p. 39) afirmam, por exemplo, que "o aprendizado de fórmulas matemáticas, por parte de uma criança, seria completamente inútil se ela não tivesse uma compreensão geral do sistema de números". Ela precisa fazer as relações para que o novo seja significativo.

Os alunos apresentam tempos de maturidade diferentes, portanto, nem todos aprendem um conceito no mesmo momento e com o mesmo tempo. O professor precisa estar atento, pois existem situações nas quais o aluno memoriza uma fórmula, um conceito ou um procedimento e apresenta um resultado favorável sem ter entendido, sendo que às vezes ele ainda não desenvolveu os instrumentos mentais necessários para compreensão desse conceito.

Piaget fez várias pesquisas sobre a lógica da criança. Na sua teoria, faz referência à relação entre linguagem e pensamento. Piaget (1999, p.1) afirma que “a linguagem serve ao indivíduo para comunicar seu pensamento”.

5.2 Vygotsky e o processo sócio-cognitivo

A teoria de Vygotsky tem como centro a origem social da inteligência e o estudo dos processos sócio-cognitivos. Vygotsky ficou conhecido como o homem que percebeu a determinação histórica da consciência e do intelecto humano. Os marcos teóricos em que se baseia o pensamento de Vygotsky sobre práticas educativas ou o planejamento de estratégias de ensino são apresentados em quatro categorias: mediação, processo de internalização, zona de desenvolvimento proximal e formação de conceitos.

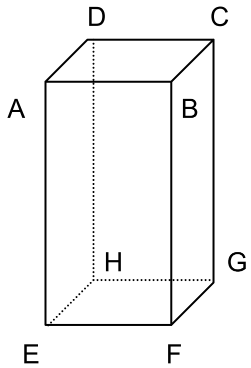
A mediação é um elemento externo ao sujeito que o auxilia a estabelecer relações entre idéias. Na Matemática, de acordo com Moysés,

> a linguagem, os vários sistemas de contagem, as técnicas mnemônicas, os sistemas simbólicos algébricos, os esquemas, diagramas, mapas, desenhos, e todo tipo de signos convencionais representam instrumentos psicológicos por excelência que servirão de mediadores para o pensamento e para o processo social humano (2000, p. 23).

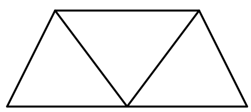
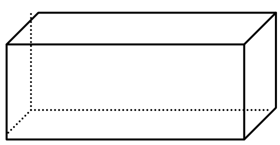
Um mediador pode ser considerado como um estímulo, um auxiliar criado pelo próprio sujeito ou por alguém de fora. De acordo com Moysés (2000, p. 26): “Com o passar do tempo, a criança deixa de necessitar desse elemento auxiliar externo, e passa a utilizar signos internos. Esses nada mais são do que representações mentais que substituem os objetos do mundo real”. Portanto, à medida que o tempo passa, o aluno vai adquirindo os significados necessários para se tornar independente e utilizá-los sem precisar de um mediador.

Exemplo retirado de (Moysés, 2000, p.111):

Olhando o sólido abaixo representado pinte com cores diferentes.
a) a região DCHG;
b) a linha BF;
c) a ponta E;
d) a região que encontra a região HGEF com a linha GF;
e) pinte as linhas que chegam na ponta H.



Esse tipo de atividade faz com que o aluno esteja atento aos detalhes e perceba diferentes elementos da figura que posteriormente serão nomeados cientificamente. Na continuidade da atividade, os alunos completam o Quadro 1:

Sólido	nº de pontas	nº de linhas	Nº de regiões planas
			
			

Quadro 1: Exercício de identificação de elementos de figuras geométricas.

O Quadro 1 poderá incluir outros sólidos geométricos e a nomenclatura poderá ser a técnica: vértice, aresta e face. A atividade leva o aluno a desenvolver esses conceitos de forma mais natural e partir do geral para o particular.

Nessa atividade, o desenho está sendo o elemento mediador da aprendizagem. Chegará o momento em que o aluno não vai precisar do desenho para saber o que é um vértice, uma aresta e uma face.

O processo de internalização tem início numa atividade externa, que será reconstruída e começará a acontecer internamente, ou seja, começa com uma função social (externa) que surgiu de um processo de interação e, quando assimilada pelo sujeito (interna), transforma o próprio processo de interação (Moysés, 2000, p. 29) e sua estrutura e funções mentais. É como se a internalização fosse a criadora da consciência.

Nesse processo de internalização, ocorre a conexão de elementos já existentes com novos elementos externos, por meio de representações que servem de mediadoras do novo conhecimento. Conforme Moysés (2000, p.27): “foi principalmente no campo da linguagem que o conceito de internalização pôde ser comprovado empiricamente”. Por exemplo, quando o aluno aplica uma fórmula matemática de forma mecânica, ele está usando uma interpretação pronta, usando o significado de outro, ou seja, um significado que ainda não é seu. A fórmula é algo externo para o aluno.

Segue uma formulação de Vygotsky para a “lei genética geral do desenvolvimento cultural” defendendo que a função psicológica interna veio de uma função social:

> Qualquer função presente no desenvolvimento cultural da criança aparece duas vezes, ou em dois planos distintos. Primeiro, aparece no plano social, e depois, então, no plano psicológico. Em princípio, aparece entre as pessoas e como uma categoria interpsicológica, para depois aparecer na criança, como uma categoria intrapsicológica. Isso é válido para atenção voluntária, a memória lógica, a formação de conceitos e o desenvolvimento da vontade. [...] a internalização transforma o próprio processo e muda sua estrutura e funções. As relações sociais ou relações entre as pessoas estão na origem de todas as funções psíquicas superiores (MOYSÉS, 2000 apud VYGOTSKY, p. 28).

Percebe-se que, além do aspecto cognitivo, nesse processo é preciso estar atento às questões afetivas, às relações interpessoais que se mostram entrelaçadas.

A zona de desenvolvimento proximal é definida como a distância entre o nível real de desenvolvimento de uma criança, que é determinado pela capacidade dela resolver um problema sozinha ou sob a orientação do professor ou de um colega mais adiantado.

O desenvolvimento cognitivo de cada aluno pode ocorrer de forma idêntica ou apresentar resultados diferentes. Observando esse fato, Vygotsky e alguns colaboradores perceberam que aquilo que alguns alunos não conseguiam fazer sozinhos eles faziam com a ajuda de um adulto. Portanto, o professor, questionando e interagindo com o aluno, poderá perceber suas zonas de desenvolvimento proximal e até a expansão das já existentes, auxiliando o aluno a superar suas dificuldades. A partir dessa ajuda, o aluno internaliza um novo conhecimento. Ele forma um novo conceito.

O exemplo a seguir foi retirado e adaptado do livro Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática (Moysés, 2000) e retrata um problema resolvido por uma aluna da 5ª série do Ensino Fundamental.

O problema:

> Eu comprei 250 m de arame para cercar o lote 17 que tem a forma de um quadrado e tem 12 m de lado.
> a) Com quantas voltas de arame eu posso cercar o lote 17?
> b) Quantos metros vão sobrar?
> Vejo, no caderno da aluna, as operações realizadas. A primeira delas é:
>
> $$\begin{array}{r} 250 \\ -17 \\ \hline 233 \end{array}$$
>
> Peço-lhe que me explique como fez. Passa a ler o problema em voz alta. Parece não se dar conta do significado do "lote 17". Mantenho com ela o seguinte diálogo:
> - Por que foi que você diminui 17 de 250?
> - Porque tem esses números lá no problema.
> - Mas o que é que ele quer dizer?
> - Que é o lote 17.
> - Qual é o número da sua casa?
> - É 48.
> - Tem alguma coisa a ver o número da sua casa com o tamanho dela?
> - Não. Acho que não.
> - Essa sala tem um número na porta. Esse número tem alguma coisa a ver com o tamanho dessa sala.
> - Não tem não. Ah! Já sei.
>
> Dizendo isso se apressa em apagar aquela conta. Tenta fazer sozinha, mas não consegue. Passo, então, a encaminhar as perguntas que a levam a resolver o problema corretamente (p. 136, 137).

O exemplo mostra a falta de compreensão do problema, e tratando-se de Matemática, fez com que a aluna operasse alguns dos números que apareciam. Para ela, o problema não tinha sentido nem significado. Foi necessária a intervenção da professora para diminuir a distância entre o problema e a sua solução. A professora provocou a aluna por meio de perguntas ligadas às suas vivências, ou seja, tentou contextualizar o problema.

> Por contexto, vale lembrar, entende-se tanto as situações criadas em sala de aula plenas de sentido, quanto o universo do aluno. Universo de experiências e representações. Vivido e imaginado. Testemunhado e compartilhado (MOYSÉS, 2000, p. 119).

Naquele momento, a aluna diminuiu a sua zona de desenvolvimento proximal relativa àquele problema, mas mesmo assim não conseguiu resolvê-lo sozinha. Portanto, a forma como a professora estava lidando com a situação estava se encaminhando para isso.

A categoria formação de conceitos está ligada com a zona de desenvolvimento proximal e com o processo de internalização.

Vygotsky (2003), referindo-se a formação de conceitos, afirma que:

> um conceito é mais do que a soma de certas conexões associativas formadas pela memória, é mais do que um simples hábito mental; é um ato real e complexo de pensamento que não pode ser ensinado por meio de treinamento, só podendo ser realizado quando o próprio desenvolvimento mental da criança já tiver atingido o nível necessário (p.104).

Para que um conceito matemático seja significativo para o aluno, é preciso que, além de lidar com sua linguagem, seus símbolos, suas propriedades e estruturas, ele faça conexões de conhecimentos prévios para a formação de um novo conceito e tudo isto respeitando o seu "momento", ou seja, que ele já esteja maduro para tal. Vigotski (2003, p.104) afirma que: "o desenvolvimento dos conceitos, ou dos significados das palavras, pressupõe o desenvolvimento de muitas funções intelectuais: atenção deliberada, memória lógica, abstração, capacidade para comparar e diferenciar". Esses elementos influem no desenvolvimento do pensamento matemático.

Geralmente, nas aulas de Matemática, são dados o conceito e atividades direcionadas para a sua memorização, resultando num ensino vazio, sem sentido e sem significado, gerando desinteresse por parte do aluno.

Moysés (2000) mostra o que seria para Vygotsky a essência de um ensino voltado para a compreensão:

> - *"trabalhado com o aluno".* A preposição com já revela uma atitude de interação. Trabalham professor e aluno. E o que é esse trabalho? O autor prossegue discriminando inicialmente o trabalho do professor.
> - *"explicou" e "deu informações".* Explicar é muito mais do que fazer uma mera exposição. É buscar na estrutura cognitiva dos alunos as idéias

> relevantes que servirão como ponto de partida para o que se quer ensinar. É caminhar com base nessas idéias, ampliando os esquemas mentais já existentes, modificando-os ou substituindo-os por outros mais sólidos e abrangentes. Nessa tarefa desempenham papel fundamental a exemplificação e o enriquecimento do que está sendo explicado com um número suficiente de informações.
> • *"questionou e corrigiu o aluno",* isto é, procurou verificar se a sua fala havia sido compreendida e, diante de possíveis erros, vai corrigindo-os (p. 37).

Como se percebe, esse tipo de ensino é um processo em que o aluno constrói o seu conhecimento junto com o professor, seja a partir de conceitos já elaborados ou pela correção de erros cometidos durante essa caminhada. O professor precisa provocar o aluno com questões que o farão avançar na sua estrutura cognitiva. Ou ainda, desestabilizar o aluno para que ele reconstrua conceitos ainda não significativos.

5.3 Vergnaud e os Campos Conceituais

A teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud é uma teoria psicológica cognitivista que estuda o desenvolvimento da aprendizagem. Essa teoria se interessa pelo que se passa dentro da sala de aula, por isso sua forte ligação com o conhecimento. Isto é, para compreender a dificuldade dos alunos em um conteúdo, é preciso verificar como este conteúdo é estruturado.

A teoria de Vergnaud surgiu para tentar entender e explicar as dificuldades dos estudantes em questões como as estruturas aditivas e multiplicativas, ou seja, teve um início totalmente ligado à Matemática, mas hoje é utilizada em todas as áreas do conhecimento. Portanto, Vergnaud precisou se interessar pelas estruturas aditivas e multiplicativas para poder estudar as dificuldades dos alunos nessas áreas. Nesse processo, as dificuldades conceituais são superadas à medida que são encontradas e enfrentadas.

Três argumentos levaram Vergnaud à definição de campo conceitual:

- um conceito não se forma dentro de um só tipo de situação;
- uma situação não se analisa com um só conceito;
- a construção e a apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo bastante longo.

Logo, o núcleo do desenvolvimento cognitivo é a conceitualização.

A teoria parte de um conceito, o qual necessita de três elementos para que seja significativo. Esses elementos são: uma situação, que dará sentido ao conceito, um conjunto de invariantes operatórios, que é o significado do conceito, ou os elementos usados pelo sujeito para analisar e dominar as situações, e a representação simbólica, que é o significante, isto é, os elementos utilizados para representar as invariantes e, conseqüentemente, representa as situações e procedimentos para lidar com elas. Para estudar o desenvolvimento, o uso e a utilidade de um conceito durante a aprendizagem é preciso considerar esses três elementos, já que um único conceito não se refere a um só tipo de situação, assim como uma única situação não pode ser analisada por um único conceito.

Dessa forma, parece que a Matemática combina, e muito, com essa teoria, pois o aluno parte de um problema (conceitos), precisa contextualizá-lo (situações) e, para resolver esse problema, utiliza a linguagem Matemática (representação simbólica). É um esquema de pensamento que apóia as ações na resolução de problemas, fazendo inclusive com que o aluno perceba que não existe uma única forma de se resolver um problema; essa vai depender da situação, do contexto em que ele será analisado. Ao desenvolver esse ciclo, o aluno mostra o seu entendimento do problema e os procedimentos para resolvê-lo. Todo esse processo revela a complexidade dessa teoria.

A teoria dos campos conceituais tem por base as teorias de Piaget e Vygotsky. De Piaget, ele utiliza a idéia de conceito de esquema, e de Vygotsky, a importância dada à interação social, à linguagem e à simbolização.

Vergnaud parte do pressuposto que o conhecimento está organizado em campos conceituais e o domínio por parte do sujeito ocorrerá ao longo de um grande período de tempo, por meio da experiência, da maturidade e da aprendizagem.

> Campo conceitual é, para ele, um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamentos conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição (MOREIRA, 2004, p.2).

Portanto, essa teoria além de formada por conceitos explícitos e formais, ela é uma teoria psicológica, ela trabalha com o sujeito como um todo. Para que ocorra a aprendizagem, o aluno deve passar por vários estágios, sendo que, em cada estágio, o aluno terá o seu tempo para realizar essa aprendizagem. Para cada um, esse tempo é diferente. Não é possível em alguns meses ou, às vezes, em alguns anos, que o aluno tenha completo domínio de um conteúdo ou um conceito, ele precisa de tempo, de vivências, de maturidade. E na escola, geralmente, os alunos são tratados e cobrados de uma mesma forma, como se todos pensassem da mesma maneira e levassem o mesmo tempo para adquirir um conhecimento, uma competência.

Vergnaud (apud GROSSI, 2003) afirma que: “Campo conceitual é um conjunto vasto, porém organizado, a partir de um conjunto de situações. Para fazer face a essas situações, é preciso um conjunto de esquemas de conceituações e de representações simbólicas.”

A teoria dos campos conceituais está inserida na linha pedagógica francesa da didática da Matemática, que tem por característica principal a formalização conceitual de suas constatações práticas e teóricas. Desenvolve a formação de conceitos didáticos que se referem à aprendizagem da Matemática. Pais (2001) afirma a respeito dos campos conceituais que:

> A teoria dos campos conceituais foi desenvolvida para estudar as condições de compreensão do significado do saber escolar pelo aluno. Trata-se de buscar as possibilidades de filiações e rupturas entre as idéias iniciais da matemática, levando em consideração as ações realizadas e compreendidas pelo aluno. Como esclarece Vergnaud (1996), essa teoria não foi criada para ser aplicada somente na Educação Matemática, mas ela foi desenvolvida tendo em vista respeitar uma estrutura progressiva de elaboração de conceitos, daí a razão da pertinência com que se aplica à matemática. Por outro lado, os conceitos matemáticos, para os quais a teoria foi testada, oferecem, com mais clareza, os invariantes integrantes de uma elaboração. As pesquisas que deram suporte à teoria dos campos conceituais dizem respeito à compreensão de situações que envolvem o estudo das operações aritméticas elementares (p 51-52).

Tomando um exemplo dado pelo próprio Vergnaud:

> comprar bolos, frutas ou chocolates, colocar à mesa, contar pessoas, talheres, jogar bolinha de gude, são para uma criança de 6 anos, atividades que favorecem o desenvolvimento da formação de conceitos matemáticos referentes ao número, comparação, adição e subtração (VERGNAUD, 1996, p.52, apud PAIS, 2001, p.218).

Essa teoria busca desenvolver no aluno percepções sobre um determinado conceito de forma organizada, ou seja, o aluno é ativo dentro do processo e é valorizado pedagógica e psicologicamente durante a sua experiência. O aluno é visto como um todo, pois é conhecido por suas competências, destacando-se por suas habilidades científicas e técnicas, por sua relação com os outros e por sua afetividade.

Portanto, os campos conceituais apresentam-se como uma teoria que tenta explicar a construção de conceitos significativos para o aluno.

O professor, nessa teoria, atua como mediador do processo, ele vai auxiliar o aluno a desenvolver seus esquemas e suas representações, criando condições para o aluno desenvolver esses esquemas na sua zona de desenvolvimento proximal, isto é, criando espaço para atividades conjuntas do professor e do aluno. O professor deverá criar situações frutíferas para que os alunos possam fazer as conexões necessárias visando construir um conceito significativo. Portanto, o professor desestabiliza o aluno para que esse queira buscar o novo conhecimento, que em muitas situações estará ancorado em conhecimentos anteriores. No momento em que esse novo conceito torna-se significativo, o aluno estará novamente estabilizado, e o ciclo termina para logo recomeçar. Esse processo está longe de ser simples ou rápido, mas está diretamente ligado com o aprender. A cada nova conexão, o aluno estará capacitado para enfrentar situações mais complexas.

Esta idéia ganha reforço na afirmação de Moreira:

> A construção do conhecimento pelo aprendiz não é um processo linear, facilmente identificável. Ao contrário, é complexo, tortuoso, demorado, com avanços e retrocessos, continuidades e rupturas. O conhecimento prévio é determinante no progressivo domínio de um campo conceitual, mas pode também, em alguns casos, ser impeditivo. Continuidades e rupturas não são, no entanto, excludentes. Pode haver continuidade e ruptura. A Álgebra, por exemplo, se apóia na Aritmética, mas ainda assim, para aprendê-la é necessário romper com a Aritmética (2004, p.13).

A teoria reforça a idéia de que a construção do conhecimento é feita com muito trabalho, empenho, dedicação, rupturas, reconstruções e necessita de tempo para ser elaborada. O professor é um elemento chave para que esse processo se dê de forma significativa.

5.4 Ausubel e a Aprendizagem Significativa

A teoria da aprendizagem significativa de Ausubel que utiliza conhecimentos prévios como principal fator na aquisição de novos conhecimentos está diretamente ligado ao processo de cognição. Assim como a teoria dos campos conceituais, a teoria de Ausubel é uma teoria de aprendizagem em sala de aula, com aquisição de conhecimento em situação formal de ensino.

Ausubel, Novak e Hanesian (1978, p.13) apontam uma questão semântica entre ensino e aprendizagem. De acordo com os autores: “O ensino e a aprendizagem não são extensivos – o ensino é somente uma das condições que podem influenciar a aprendizagem”. O professor ensinar não garante que o aluno aprenda, e vice-versa. Fatores como atenção, motivação e preparo são indispensáveis para que o ensino seja eficaz. Esta via de mão dupla na prática mostra que facilitar a aprendizagem é a finalidade do ensino, de acordo com os autores acima citados.

Ausubel relaciona a aprendizagem com mudança de capacidade, observando que é possível tirar uma conclusão através da comparação do desempenho anterior e posterior à aprendizagem. Ausubel analisa essa mudança por meio de questionamentos do tipo: Que efeito tem no aluno aprender a distinguir triângulos de retângulos e aprender a demonstrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°? O professor, ao introduzir um novo conceito (soma dos ângulos internos), faz referência a algo já dominado pelo aluno (diferença entre triângulos e retângulos) para que, por meio de comparações e análises, ele possa tornar significativo o novo conceito (a soma dos ângulos internos de triângulo ser igual a 180°), e a partir desse concluir sobre a soma dos ângulos internos de qualquer figura plana.

Ele observa que essas mudanças podem ser desiguais e classifica tipos de aprendizagem que desenvolvem diferentes tipos de capacidades. As aprendizagens são classificadas em automática e significativa e podem ocorrer de duas maneiras: por recepção e por descoberta. Na aprendizagem por recepção, seja automática ou significativa, o conteúdo é apresentado pronto para o aluno. Por descoberta, o conteúdo principal do que será desenvolvido não é dado, deve ser descoberto pelo aluno.

A partir de algo significativo, é possível construir outros elementos também significativos. Desta forma, tem origem uma estrutura cognitiva.

Podemos perceber isto nas idéias de Moreira e Masini (2001):

> A Psicologia cognitivista preocupa-se com o processo da compreensão, transformação, armazenamento e uso da informação envolvida na cognição, e tem como objetivo identificar os padrões estruturados dessa transformação. É uma teoria particular, cuja asserção central é a de que ver, ouvir, cheirar, etc., assim como lembrar, são atos de construção que podem fazer maior ou menor uso dos estímulos externos, dependendo da circunstância, isto é, das condições pessoais de quem realiza o processo (p.3).

A teoria da cognição nos faz compreender o processo através do qual o mundo de significados tem origem. Ela se propõe a estudar o ato da formação de significados ao nível da consciência. No momento em que o aluno está em contato com um conceito matemático, e se coloca na busca de seu entendimento ou da sua identificação, ele está tornando consciente aquele conceito que passará a ser significativo.

Para Ausubel (apud MOREIRA; MASINI 2001), uma aprendizagem é significativa quando uma nova informação se relaciona com algo que é relevante para a estrutura do conhecimento do indivíduo. Ocorrerá a aprendizagem se ela for de fato significativa para o aluno.

Ainda, como afirma Rollo May (1973, apud MOREIRA; MASINI 2001), é a consciência que atribui significado aos objetos que rodeiam o indivíduo. Ele afirma inclusive que é preciso ter a intencionalidade, pois é ela que faz a ponte entre o sujeito e o objeto, ou ainda é a estrutura que dá significado à experiência.

Portanto, é fundamental que o aluno tenha a intenção de querer “ver” o significado dos conceitos matemáticos para que eles se tornem conscientes para ele e façam parte do seu conhecimento.

Uma abordagem cognitiva não parte dos erros dos alunos para tentar determinar as suas concepções, ou da origem das suas dificuldades em conceitos matemáticos. Ela procura definir o funcionamento cognitivo, criando condições ao aluno de compreender, efetuar e controlar ele próprio os diversos conceitos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino.

Seguindo esta linha, Machado (2003) apresenta duas questões preliminares e fundamentais para analisar as condições e os problemas da aprendizagem em Matemática:

> 1- Quais sistemas cognitivos são necessários mobilizar para aceder aos objetos matemáticos e para efetuar as múltiplas transformações que constituem os tratamentos matemáticos?
> 2- Esses sistemas cognitivos são os únicos a ser mobilizados por qualquer processo de conhecimento em outros domínios científicos (geologia,

> astronomia, física, biologia...) e práticos, ou, ao contrário, trata-se de sistemas específicos, cujo desenvolvimento e cuja aquisição são próprios da atividade matemática? (p.12).

Portanto, é necessária uma abordagem cognitiva, já que o objetivo do ensino da Matemática é poder desenvolver no aluno sua capacidade de raciocínio, de análise e de visualização do mundo como um todo, e não formar futuros matemáticos, ou fornecer instrumentos que só serão utilizados posteriormente.

Falcão (2003, p. 18) chama de atividade matemática o contexto cultural complexo de atividades que envolvem a matemática escolar, a matemática do dia-a-dia e a matemática dos matemáticos, ilustrada no Quadro 2 a seguir:

Atividade Matemática

Matemática Escolar	**Matemática Extra-escolar**	**Matemática dos matemáticos**
Conjunto de iniciativas estruturadas voltadas para a negociação, em contexto cultural específico (sala de aula), de atividades voltadas para o desenvolvimento conceitual em matemática.	Conjunto de atividades envolvendo conhecimentos matemáticos no contexto de situações extra-escolares culturalmente significativas (comércio, práticas profissionais).	Corpo de conhecimentos socialmente compartilhado, epistemologicamente delimitado e praticado por grupos profissionais-institucionais específicos: os centros de produção de conhecimento matemático acadêmico.
-Didática de conteúdos específicos. **-Psicologia escolar.**	**-Psicologia social.** **-Antropologia da matemática, etnomatemática.**	**-Epistemologia da matemática.** **-História da matemática.**
Psicologia da educação matemática		

Quadro 2: A atividade matemática como foco tripolar recoberto pela psicologia da educação matemática

O Quadro 2 sugere quais atividades são relativas a cada situação de aplicação da Matemática e o que está envolvido em cada atividade. De acordo com Falcão (2003), a contribuição da psicologia da educação matemática:

> mostra uma clara preocupação com a atividade mental de um sujeito humano real, ou seja, inserido em contexto histórico-cultural específico, onde exercitará diversas atividades de aprendizagem (desde a imitação e o faz-de-conta da primeira infância até a aprendizagem complexa de heurísticas de resolução de problemas, no ensino superior), movido por motivações variadas e diversamente impregnadas de afetos (p. 15).

Ausubel, Novack e Hanesian (1978, p. 39), desde a década de 60, têm preocupação com a aprendizagem significativa. Eles apresentam a aprendizagem de três maneiras: representacional, de conceitos e proposicional. De acordo com os autores:

- Aprendizagem representacional: refere-se ao significado das palavras ou símbolos unitários.
- Aprendizagem de conceitos: consiste na formação do conceito.
- Aprendizagem proposicional: diz respeito ao significado de idéias expressas por grupos de palavras combinadas em proposições ou sentenças.

Tanto a aprendizagem representacional como a conceitual e a proposicional têm uma forma de relacionar a nova informação com os aspectos relevantes da estrutura cognitiva do aluno. Esses aspectos vão diferenciar a aprendizagem em subordinada, superordenada ou combinatória.

Conforme os mesmos autores (1978):

- Aprendizagem subordinada: é o processo de vincular novas informações e segmentos preexistentes da estrutura cognitiva (p. 48);
- Aprendizagem superordenada: quando se aprende uma nova proposição inclusiva que condicionará o surgimento de várias outras idéias (p. 49);
- Aprendizagem combinatória: aquelas combinações sensíveis de idéias previamente aprendidas que podem relacionar-se não arbitrariamente ao

> amplo armazenamento de conteúdo, geralmente relevante, na estrutura cognitiva, em virtude de sua congruência geral com este conteúdo como um todo (p. 50).

A teoria da aprendizagem significativa, segundo Lima e Brito (2001, p. 112) “faz parte do grupo de teorias cognitivas que buscaram explicar os mecanismos e procedimentos internos que ocorrem na estrutura cognitiva dos seres humanos”.

5.5 Fechamento

As teorias: Construtivista (Piaget), Sócio-cognitiva (Vigotski), Campos Conceituais (Vergnaud) e Aprendizagem Significativa (Ausubel) se desenvolveram com a preocupação de propiciar uma aprendizagem significativa para o aluno e o progresso dele nas suas estruturas cognitivas.

As teorias apresentam como ponto central a aprendizagem significativa e alguns pontos comuns, mas que são desenvolvidos de formas diferentes. Todas colocam o aluno como sujeito de sua aprendizagem, seja ele criando o seu próprio mundo, reforçando suas funções sociais, respeitando o seu tempo interno (maturidade) para compreender um novo conceito, aproveitando suas vivências e fazendo as conexões de um conhecimento prévio para construção de um novo. Os elementos externos só serão internos no momento em que o aluno tiver a compreensão, para então, fazer parte da sua consciência, do seu conhecimento.

As teorias tratam do desenvolvimento do pensamento e a sua ligação com a linguagem. Os quatro autores defendem a contextualização como uma situação criada que tenha relação com as vivências do aluno e auxilie no entendimento e resolução de problemas.

A Matemática tem uma linguagem e uma estrutura próprias que desenvolvem o pensamento do aluno. O pensamento matemático está ligado às quatro teorias, as quais analisam essa forma de pensar em todas as etapas. Auxiliam, portanto, no entendimento da relação aluno-matemática.

6 APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Aprender envolve alguns fatores externos e outros internos. Aprender Matemática envolve elementos próprios da disciplina. E ter uma aprendizagem significativa, alguns a mais. A aprendizagem está associada com a vontade, com o querer, com o buscar, e com a necessidade de esforço, sendo também necessária toda uma infra-estrutura que dê condições para que isto ocorra. É a construção de um ser a partir de elementos que lhe são significativos, que tem a ver com sua forma de pensar e agir em relação a si mesmo e ao mundo que o cerca.

6.1 Reflexões sobre aprendizagem

Falar em aprendizagem é, em geral, falar em aquisição de conhecimento. Diferentes autores apresentam diferentes definições ou concepções de aprendizagem. E existem teorias que defendem essas idéias, como por exemplo, a teoria dos Campos Conceituais, a teoria da Aprendizagem Significativa, entre outras.

Ausubel classifica a aprendizagem em significativa ou mecânica, definindo-as: “A aprendizagem significativa é um processo pelo qual uma nova informação se relaciona com um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo” (AUSUBEL apud MOREIRA, 2004, p.7-8) e “Aprendizagem mecânica é a aprendizagem de novas informações com pouca ou nenhuma associação com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva” (AUSUBEL apud MOREIRA, 2004, p.8).

As nomenclaturas utilizadas para definir formas de aprendizagem, são bem variadas, mas a "idéia de aprender" é basicamente a mesma. Pode-se observar isto nas diversas concepções de aprendizagem citadas a seguir:

"Aprendizagem por descoberta ocorre quando o aprendiz é levado a encontrar, sozinho, o significado de um ou mais conceitos que se encontram imersos no conteúdo total a ser aprendido" (BRITO, 2001, p. 74).

"Na aprendizagem por recepção, o material é apresentado ao sujeito em sua forma pronta, final e acabada" (BRITO, 2001, p. 74).

"Toda aprendizagem equivale a um processo de adaptação do organismo ao seu meio" (DIENES, 1986, p. 2).

Gagné considerando que a aprendizagem deve ter referências tanto em situações cotidianas como escolares definiu: "A aprendizagem como uma modificação na disposição ou na capacidade do homem, modificação essa que pode ser retirada e que não pode ser simplesmente atribuída ao processo de crescimento" (GAGNÉ apud BRITO, 2001, p.70).

"Aprender é transitar ignorâncias a partir do desejo de explicar e resolver problemas. Ensinar é criar provocações inteligentemente articuladas para que se atinja cada aluno" (GROSSI, 2003, p. 118).

"Aprender é apropriar-se da linguagem; é historiar-se, recordar o passado para despertar-se ao futuro; é deixar-se surpreender pelo já conhecido. Aprender é reconhecer-se, admitir-se" (FERNANDÉZ, 2001, p.36).

"Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção" (FREIRE 1996, p. 25).

“Aprender significa conhecer, fixar na mente” (PFROMM apud BRITO, 2001, p. 70).

“A aprendizagem significativa ocorre quando as novas informações e conhecimentos podem relacionar-se de uma maneira não-arbitrária com aquilo que a pessoa já sabe” (SANTOMÉ, 1998, p. 41).

“Aprendizagem memorística ocorre quando quem aprende encontra conteúdos quase sem sentido, ligados arbitrariamente entre si e difíceis de relacionar com os conteúdos de sua atual estrutura cognitiva” (SANTOMÉ, 1998, p. 41).

Aprendizagem é um tema abordado por diversas correntes teóricas e, em geral, as concepções a respeito da aprendizagem não têm grandes variações: idéias são apresentadas na busca de melhorar a relação do aluno com a escola e suas relações internas e externas. A palavra aprendizagem une o aprendiz com o agir, ou seja, o aprendiz age. O aprendiz é aquele que toma o conhecimento, retém na memória, mediante o estudo, a observação ou a experiência, portanto ele terá uma ação para a aquisição do conhecimento.

As diversas concepções a respeito da aprendizagem têm influência no aprendizado do aluno. Falando de Matemática: a sua aprendizagem se dá de forma paulatina, pois não é decorando regras, conceitos e propriedades que se aprende ou entende Matemática. É possível seguir modelos prontos e ser aprovado nessa disciplina, porém isto não é construção de conhecimento, não é aprender de forma significativa. Sempre estará embutida a concepção do professor sobre aprendizagem.

Na sala de aula, aluno e professor assumem papéis diante da aprendizagem que é desenvolvida. Fazendo um paralelo entre o papel do professor e o papel do aluno frente às aprendizagens mecânica e significativa numa aula de Matemática, pode-se observar que:

	Professor	**Aluno**
Aprendizagem Mecânica	Dá o conceito pronto, faz alguns exemplos, e dá uma lista com exercícios "parecidos" com os exemplos.	Copia a definição e os exemplos, faz os exercícios usando como modelo os exemplos dados pelo professor.
Aprendizagem Significativa	Constrói os conceitos junto com os alunos. Trabalha exemplos e problemas contextualizados.	Compreende o conceito fazendo conexões com conhecimentos anteriores. Desenvolve o pensamento matemático através da resolução de problemas e uso de diferentes metodologias.

Quadro 3: Ações do professor e do aluno frente às aprendizagens mecânica e significativa.

O Quadro 3 apresenta dois tipos de aprendizagem que podem ocorrer numa aula de Matemática. São situações diferentes de aprendizagem. Em geral, nas aulas de Matemática, a aprendizagem ocorre de forma mecânica, e o aluno reage de acordo com o modelo que lhe é exigido.

É possível ensinar e aprender Matemática de ambas as formas, cuidando para que o produto final seja significativo. Na Matemática, alguns conceitos e generalizações podem ser internalizados e tornados significativos por meio de uma aprendizagem receptiva, que mais tarde poderá ser a base para uma aprendizagem feita por descoberta pelo próprio aluno. Por exemplo, o aluno pode entender o conceito de volume dado de forma receptiva. Este conceito pode levá-lo a descobrir por que $1m^3$ é igual a 1000 litros.

A Figura 1, reproduzida do livro Psicologia Educacional de Ausubel, Novak e Hanesian (1978, p. 21) apresenta a relação entre dois tipos de aprendizagem e o que acarreta o uso de cada uma. É possível observar várias situações de ensino e aprendizagem na Figura 1, apresentadas numa linguagem gráfica. O eixo vertical faz referência aos modos através dos quais os alunos ou qualquer pessoa incorporam o novo conhecimento às suas atuais estruturas cognitivas. O eixo horizontal corresponde às estratégias didáticas às quais se recorre para proporcionar informação aos alunos.

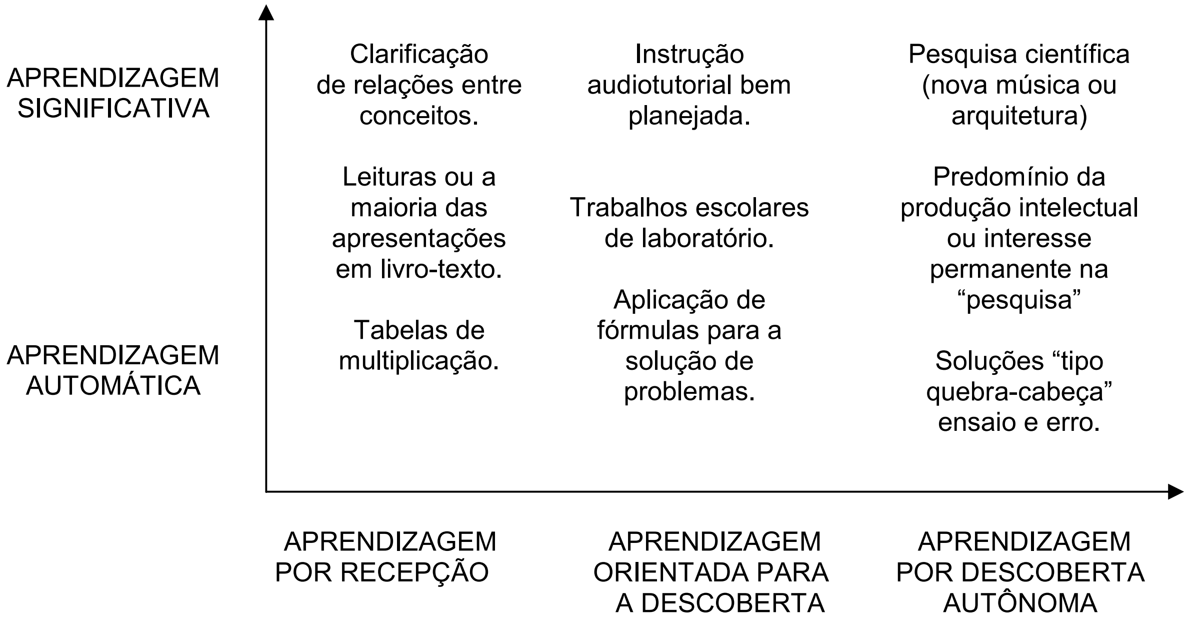


Figura 1: Aprendizagem receptiva e aprendizagem por descoberta situam-se em diferentes contínuos que partem da aprendizagem automática ou da aprendizagem significativa.

Na Figura 1, pode-se perceber a diferença entre aprendizagem por recepção e aprendizagem por descoberta, e também, entre aprendizagem automática (mecânica) e aprendizagem significativa. O aluno adquire informações em grande parte através de descobertas, tanto dentro como fora da escola. De acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1978), muitas dessas informações são apresentadas de forma verbal, e pode-se observar que a aprendizagem receptiva verbal não é necessariamente automática e pode ser significativa sem uma experiência prévia não verbal ou de solução de problema.

Pode-se discutir qual é a melhor maneira de lidar com o ensino e a aprendizagem, mas é preciso que fique claro que não existe uma única forma de ensinar e de aprender. Pode-se ter uma aprendizagem por recepção, por exemplo, quando o professor apresenta um tema aos alunos com todos os conceitos definidos, as propriedades estabelecidas numa seqüência lógica e organizada sem que o aluno precise descobrir nada, é apresentada ao aluno a forma final. Entretanto, se o professor permite que o aluno descubra os significados, faça relações entre os conceitos e propriedades, então ele terá uma aprendizagem por descoberta.

Os dois exemplos acima podem ser apresentados de forma significativa ou mecânica, pois vai depender de sob que condições se dá a aprendizagem. De todas as maneiras acontece o aprendizado, porém se esse aprendizado se der de forma significativa, o aluno irá incorporar na sua estrutura cognitiva o conhecimento de forma expressiva e clara. Isto não acontece se a aprendizagem for mecânica. Como diria Freire (1996, p. 30): “Repete o lido com precisão, mas raramente ensaia algo pessoal”.

De acordo com Ausubel, Novak e Hanesian (1978):

> Grande parte da confusão nas discussões de aprendizagem escolar tem origem na deficiência de se reconhecer que as aprendizagens automática e significativa não são completamente dicotomizadas. Embora sejam *qualitativamente* descontínuas em termos de processos psicológicos subjacentes *a cada uma* e, portanto, não possam estar situadas em pólos opostos do mesmo contínuo, há dois tipos intermediários de aprendizagem que compartilham algumas das propriedades, tanto da aprendizagem automática como da significativa (por exemplo, a aprendizagem representacional ou aprendizagem de nomes de objetos, eventos e conceitos). Além disso, ambos os tipos de aprendizagem podem ocorrer concomitantemente na mesma tarefa de aprendizagem. Esta mesma

> qualificação acentua ainda mais a distinção entre aprendizagem por recepção e por descoberta (p. 20).

A aprendizagem por descoberta tem a vantagem de que aquilo que será aprendido pelo aluno é descoberto por ele e acrescentado a sua estrutura cognitiva antes de se tornar significativa de outra forma. É uma ligação direta, sem interferências, do entender e do ter significado. O aluno estabelece as conexões com conhecimentos anteriores, organiza as informações e toma decisões. Nesse processo, o aluno é independente e autônomo.

6.2 Tipos de aprendizagem matemática

A Matemática, assim como qualquer disciplina, tem suas características, tem suas formas de ensinar e aprender. De acordo com Bravo e Huete (2005), a Matemática apresenta quatro tipos de aprendizagem:

1- <u>Aprendizagem por Memorização</u>: “O conceito de memorização deve ser entendido em função de uma memória operativa, a qual age sobre estruturas significativas do conhecimento e cuja finalidade é armazenar, a longo prazo, a informação nova” (p. 75).

2- <u>Aprendizagem algorítmica</u>: “Necessita da memória para inferir o método exato, além de carregar a dificuldade frente à escassa ou nula significatividade que os algoritmos matemáticos possuem *a priori*” (p.76).

3- <u>Aprendizagem de conceitos</u>: “A definição de conceito matemático não é fácil pelo caráter de abstração que a matemática possui. É preciso pensar que ela consiste em uma construção hierárquica, alguns conceitos sobre a base de outros” (p. 71).

4- <u>Aprendizagem por Resolução de problemas</u>: "Trata-se de um processo no qual se combinam diferentes elementos que o aluno possui, como pré-conceitos (em geral, aqueles conhecimentos previamente adquiridos que servem a uma nova situação), as regras, as habilidades..." (p.71).

Os autores acima citados enfatizam que os quatro tipos de aprendizagem são legítimos e afirmam que "nenhum tipo, por sua natureza, incorpora ou exclui outro ou outros tipos de aprendizagens" (p.75). É preciso trabalhar a memória para relacionar de forma lógica os conceitos, e não simplesmente exercitá-la para repetições mecânicas e sem sentido. A memória irá auxiliar na aplicação de algoritmos matemáticos necessários para a resolução de problemas e específicos em cada situação, portanto a compreensão do algoritmo leva à percepção da diferença de situações em que são aplicados.

Na Matemática, geralmente, um conceito é construído usando outro como base, existe uma hierarquia. O que auxilia os alunos no entendimento de muitos conceitos é a análise de exemplos e contra-exemplos. Na resolução de problemas, o aluno pode mostrar o seu entendimento sobre o conteúdo, as habilidades que possui para a aplicação de regras e conceitos. Portanto, na resolução de problemas, ele estará utilizando os três tipos de aprendizagem anteriores.

O exemplo a seguir, retirado de Dante (2002, p. 461), ilustra os quatro tipos de aprendizagem.

Um suco de frutas é vendido em dois tipos de latas cilíndricas. Uma delas (figura 1) tem raio da base x e altura y. A outra (figura 2) tem raio da base $\frac{x}{2}$ e altura 2y. A primeira delas é vendida por R$ 16,00 e a segunda por R$ 10,00. Qual das duas é mais vantajoso comprar?

Figura 1

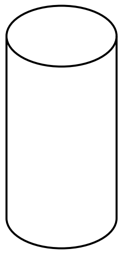


Figura 2

Para resolver este problema, o aluno precisa conhecer alguns conceitos de geometria (cilindro, raio, altura, volume), de álgebra (variável representando medidas), de aritmética (metade, dobro, comparação) e de análise de dados (comparar resultados, tomada de decisão). Esses conceitos estão na sua memória operativa, ou seja, são significativos, pois caso contrário ele não conseguirá resolver o problema. De posse desses elementos, o aluno resolve o problema usando algoritmos da geometria, como a fórmula do volume de um cilindro, entre outros. Ao decidir qual o suco mais vantajoso, comparando o volume com o preço, o aluno resolve o problema.

É possível, portanto, observar os quatro tipos de aprendizagem matemática num único problema. Em geral, esta análise dos elementos envolvidos no desenvolvimento de um problema não é feita ou levada em consideração, o que acaba favorecendo a memorização sem significado e a aplicação de algoritmos de forma mecânica.

Pais (2001), a respeito da aprendizagem matemática, salienta que: “É preciso buscar problemas que permitam mais de uma solução, que valorizem a criatividade e admitam estratégias pessoais de pesquisa”. (p.35)

6.3 A Educação Matemática no mundo

A preocupação com a aprendizagem da Matemática é algo mundial, pois é possível perceber em vários países a busca de soluções para que o ensino da Matemática seja significativo, fazendo com que os alunos tenham sucesso nessa disciplina. O sucesso estaria ligado ao entendimento de conceitos, da linguagem matemática e à aplicação dessa linguagem a partir de simbologia própria e às conexões que o aluno faz na própria Matemática e em outras áreas, chegando a novos conhecimentos a partir desse aprendizado.

Um avanço foi, há algum tempo, existir a preocupação em diferenciar a Matemática da Educação Matemática, essa última fundamentalmente ligada ao ensino da Matemática. Anualmente, acontecem encontros, simpósios e cursos, entre outros, sobre Educação Matemática. São centenas de professores discutindo e/ou pesquisadores analisando o ensino e a aprendizagem da Matemática nas suas escolas, nos seus países e no mundo.

Em um artigo do livro “Educação Matemática – pesquisa em movimento”, Onuchic e Allevato (2004) afirmam a este respeito que:

> gente de todo o mundo está trabalhando na reestruturação da Educação Matemática. Ensinar bem Matemática é um empenho complexo e não há receitas fáceis para isso. Não há um caminho único para se ensinar e aprender Matemática (p.214).

A seguir, algumas exposições feitas em outros países sobre a problemática existente na Educação Matemática em geral.

Portugal:

> A realidade do nosso país em relação ao insucesso na Matemática é simplesmente assustadora. Nestes últimos anos tem se feito algum investimento na formação inicial de professores e o número de participantes no PROFMAT (Encontro Nacional de Professores) têm aumentado significativamente, mas os indicadores de insucesso não deixam margem para dúvidas (NUNES; ALVES; ALVES, 2001).

Bolívia:

> O problema de aprendizagem da matemática talvez seja um dos maiores desafios para a didática, os fatores que incidem neste problema são múltiplos e aí nasce a sua complexidade, a atitude mais cômoda para o professor de matemática é a de reproduzir o estilo com o qual ele foi formado (ANTEZANA, 2005).

A preocupação com a Educação Matemática e a educação em geral é debatida no mundo todo por educadores de todas as áreas e setores, preocupados com o desenvolvimento cognitivo do aluno. Que esse aluno tenha uma formação crítica, desenvolva habilidades, seja autônomo e criativo.

6.4 Análise sobre aprendizagem

Alguns elementos que contribuem para o insucesso da Matemática em muitos países podem ser apresentados sob dois aspectos: internos ou externos ao aluno. As questões internas são mais difíceis de se lidar, pois envolvem elementos pessoais, e é preciso o empenho individual para se ter uma mudança. A interferência neste sentido é bastante delicada. Já as questões externas têm teor social, ou seja, são elementos que podem ser discutidos no coletivo para se amenizar o problema e buscar soluções. Os aspectos abaixo citados ocorrem independente da escola ser pública ou privada, do país ser de primeiro ou terceiro mundo. Isto é mais um elemento que aponta a necessidade de se repensar a forma de desenvolver a Matemática na escola.

Aspectos que são internos aos alunos:

- cada aluno tem personalidade própria, capacidades inatas, e uma vivência pessoal que o diferencia de todos os outros;
- a realidade sócio-econômico familiar e o grau de escolaridade dos pais;
- a aprendizagem contínua realizada por cada aluno ou, contrariamente, a existência de lacunas de aprendizagem.

Aspectos que são externos aos alunos:

- o sistema educativo na sua generalidade é igual para todos;
- a má formação de muitos professores e a desatualização, isto é, falta de uma formação continuada;
- os conteúdos programáticos e a complexidade da linguagem Matemática é assimilada e compreendida de formas diferentes por cada aluno;
- o fato de não se efetuar conexões entre os conteúdos matemáticos e a evolução histórica da Matemática;
- a falta de ligação entre os professores das diferentes etapas e os diferentes anos de escolaridade;
- a falta de diversificação dos materiais didáticos e das estratégias de implementação dos mesmos na sala de aula;
- os conteúdos são compartimentados e estanques, não se comunicam entre si;

- o preconceito em relação à disciplina de Matemática transmitido e vivido pelos pais e outras pessoas da comunidade escolar;
- a desmotivação provocada pela falta de ligação dos conteúdos matemáticos à realidade, que faz com que o aluno se pergunte: "onde vou aplicar o que hoje estou aprendendo?";
- a falta de tecnologia adequada ou inexistente (calculadoras, computadores) e software específico como ferramenta disponível para serem utilizados.

Os aspectos internos e externos ao aluno apontam, também, para a necessidade de mudança no ensino e aprendizagem da Matemática. Os alunos não são todos iguais, nem **tabula rasa** a ser preenchida. Eles adquirem conhecimentos através de suas vivências e experiências dentro e fora da escola. Isso faz com que cada um lide de maneira diferente com conteúdos e conceitos. As conexões de suas estruturas cognitivas têm tempo e momento diferentes.

Grossi (2003) faz um comentário que une alguns destes elementos:

> Para bem ensinar, é preciso inicialmente detectar onde os alunos estão porque eles não são todos iguais. Não só são singulares, dramaticamente, por causa das recordações que os constituem, como, do ponto de vista lógico, alguns viveram certas experiências que lhes permitiram avançar mais nas suas concepções do que outros (p. 109).

Nesse processo, o professor também precisa se reciclar, pensar no seu fazer pedagógico e, mais especificamente, nas suas concepções a respeito da Matemática e da Educação Matemática. Bicudo (1999) mostra de forma bastante clara o papel da Educação Matemática em relação à Matemática:

> Assumir uma postura fenomenológica ao trabalhar-se com *Educação Matemática* significa buscar sentido daquilo que se faz ao ensinar e ao aprender matemática; dos conteúdos matemáticos veiculados na cultura, quer sejam aqueles do senso comum e do cotidiano vivido pelos sujeitos, quer sejam os veiculados em livros, revistas especializadas e na academia; das ideologias que permeiam as redes de significados das concepções matemáticas, das concepções pedagógicas, da prática educacional. É buscar compreender o sentido que o mundo faz para cada participante de um processo específico de ensino e de aprendizagem, procurando pontos de intersecção de horizontes de compreensão; é ficar atento ao outro como sujeito do mundo-vida, interlocutor do compreendido e presença nuclear no processo de autoconhecimento. É proceder constante e sistematicamente a análise, a reflexão e a crítica das verdades aceitas (p. 31).

O professor precisa de teoria para ensinar, não é possível ficar só no senso comum, ele precisa se atualizar e discutir os problemas do seu dia-a-dia profissional. Para Pain (2003, p. 66), “A teoria nos dá uma base, um fundamento que nos permite, por exemplo, criticar certos métodos, criticar a seqüência de tudo o que recebemos por tradição”.

Quanto mais o professor se atualiza e discute o seu fazer pedagógico, maiores são as possibilidades de desenvolver uma aprendizagem significativa e prazerosa com seus alunos, levando em consideração os aspectos internos e externos relativos ao ensino da Matemática.

6.5 Aprendizagem e mudança

Mudanças geralmente são lentas, mas são possíveis e trazem crescimento e novos paradigmas para quem se envolve no processo. Mudança tem ligação com o novo. Em certos casos, é preciso fazer uma revolução, no sentido da palavra, transformação radical de conceitos, para que se tenha uma mudança de fato. Thomas Kuhn (2000) já se referia a essas mudanças em A estrutura das revoluções científicas: “Este é o último dos sentidos no qual desejamos dizer que, após uma revolução, os cientistas trabalham em um mundo diferente” (p.171).

Brito (2001), relacionando aprendizagem com mudança, afirma que: “A aprendizagem é um processo que envolve as esferas cognitiva, afetiva e motora e pode ser inferida a partir de mudanças relativamente permanentes no comportamento, resultante da prática” (p. 69).

Mudança é uma palavra que tem muitas significações dentro do ambiente escolar, pois pode estar se referindo ao ambiente de aprendizagem, ao currículo, às novas tecnologias, às normas da sala de aula, às práticas escolares, às crenças dos professores e alunos, ou a melhorar o ensino e aprendizagem.

Baldino (1999), analisando mudanças, afirma que:

> Para obter um compromisso de mudança será necessário articular no mesmo espaço de *discurso*, a pesquisa em Educação Matemática, as licenciaturas e as salas de aula de matemática. Agir a partir e sobre as falas matemáticas, torna-se, então, a condição do compromisso de mudança. Os alunos são, então, considerados, não por suas habilidades, seus conhecimentos, seus desempenhos, mas, sim pelo que dizem. O compromisso só pode ser decorrência da *identidade do sujeito* enquanto ser social-falante, portanto humano (p.225).

Ocorrendo a mudança, de maneira reflexiva, nas formas de ver o ensino e a aprendizagem, aumentam as possibilidades de acontecer outras mudanças ligadas ao ambiente escolar, assim como: a prática do professor e o envolvimento do aluno.

Um primeiro passo para produzir essa mudança na busca de um ensino significativo e de qualidade é analisar os problemas existentes e o que impede o desenvolvimento, no caso, de um ensino de Matemática bem sucedido.

Baldino (1999, p. 222) apresenta dois planos para se pensar em produzir a mudança:

Plano prático: como reduzir o quadro geral de fracasso do ensino da Matemática?

Plano teórico: qual o papel das rotinas de sala de aula na permanência desse fracasso?

O autor propõe duas questões bastante pertinentes, pois para querer buscar uma revolução no ensino e aprendizagem da Matemática de forma que seja contextualizada e significativa, é preciso em primeiro lugar ter planos de ação para não cair na discussão vazia, sem uma ação efetiva.

6.6 Fechamento

Falar em aprendizagem significativa motiva a refletir sobre o que vem a ser aprendizagem, sendo possível aprender de diferentes maneiras. Existem muitas teorias sobre aprendizagem, cada qual defendendo suas concepções sobre o aprender e o aprendiz. Para as concepções consideradas neste trabalho, o aluno é o foco da aprendizagem, e a forma vai depender das condições em que a aprendizagem ocorre.

A aprendizagem envolve aspectos que podem ser internos ou externos ao aluno, sendo que os internos dependem do aluno, ao passo que os externos, da comunidade escolar como um todo. Porém, os dois tipos de aspectos estão interligados e sem um deles a aprendizagem não ocorre. Seja ela por recepção ou por descoberta, automática ou significativa.

A aprendizagem significativa, independente do tipo de aprendizagem que se utiliza em sala de aula, é o objetivo de uma grande parte dos professores. Para tanto, os professores precisam de aprimoramento, de formação continuada e de metodologias que possam auxiliar no alcance desse objetivo. Desta forma, as mudanças podem ser implantadas, trazendo como conseqüência um ensino melhor.

7 ANÁLISE DE ERROS

O tema que deu origem a este trabalho foi a análise das causas do erro, pois o erro, quando freqüente, pode levar o aluno ao insucesso na Matemática. Dependendo do conteúdo trabalhado, é possível saber, por antecedência, o ponto exato onde o aluno irá errar. Existe um tipo de erro que poderia ser rotulado como padrão, pois, independentemente do ambiente escolar, esse erro se apresenta da mesma maneira e envolvendo os mesmos conteúdos. Levanta-se como ponto de reflexão: Se for possível prever alguns tipos de erro, por que não mudar a forma de ensinar para que o erro não ocorra? Que fatores levam o aluno ao erro? Como é possível identificar as dificuldades e fazê-lo superá-las? Para responder estas questões, foram levados em conta alguns questionamentos.

- Que relação o aluno tem com os estudos e com a Matemática?
- O aluno entende o que o problema está pedindo?
- O aluno entende os termos utilizados no problema?
- O aluno faz a transformação de linguagens: Português – Matemática?
- O aluno identifica e utiliza os símbolos matemáticos?

O objetivo é encontrar uma forma significativa de desenvolver alguns conteúdos que comprovem que, independentemente da escola em que o aluno esteja, ele vai cometer um erro que já é esperado. Se já é esperado, é preciso, então, tentar superá-lo.

7.1 Generalização de propriedades

O aluno trabalha com muitas regras sem significado, o que o leva a generalizar a sua aplicação de forma indiscriminada. Eis alguns exemplos de erros cometidos pelos alunos fazendo estas generalizações:

Erro cometido	Regra presumida
$-2-3=+5$	Menos com menos dá mais
$3^2 = 6$	Multiplica a base pelo expoente
$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{3}{7}$	Soma os números como se fossem inteiros
$\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}=-\frac{4}{7}$	Multiplicação
$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{10}$	Soma como se fossem inteiros
$\frac{2}{4}=2$	Simplificação
$(2-4)^2 = 2^2 + 4^2$	Quadrado de um número
$\frac{2}{3}.\frac{1}{6}=\frac{4.1}{6}=\frac{4}{6}$	Faz MMC
$12 - 3.5 = 9.5 = 45$	Operações na ordem em que aparecem
$(2x)^2 = 2x^2$	Parênteses não fazem diferença
$x^2 + x^3 = x^5$	Mantém a base e soma os expoentes
$x^2 - 5x + 6$	Fórmula de Bhaskara

Quadro 4: Exemplos de alguns tipos comuns de erro.

O Quadro 4 apresenta uma lista de erros cometidos pelos alunos no desenvolvimento de questões ligadas a conteúdos do Ensino Médio. A cada erro está associada uma regra que foi mal aplicada, confundida ou generalizada. Cada um dos exemplos mostra o tipo de generalização da regra aplicada e a dificuldade de lidar com operações algébricas. As expressões algébricas, em geral as de 2º grau, são igualadas a zero para encontrar a raiz, mesmo que ela seja uma expressão. O que torna diferente uma expressão algébrica de uma equação? Para o aluno, parecem ser a mesma coisa.

Esses exemplos vêm reforçar a idéia de que o aluno trabalhar com uma linguagem que não está estruturada para ele e com símbolos sem sentido. Não é um conhecimento adquirido e assimilado, mas uma aprendizagem mecânica, construída através de exercícios repetitivos e modelos prontos.

Conforme Dienes (1975):

> Se uma generalização ou uma série de generalizações é feita restritamente, isto é, sem uma adequada amplitude de abstração, pode-se bem encontrar uma resistência à simbolização (p. 138).

Generalizações essas resultam de um ensino embasado em regras sem significado e mal estruturado.

No momento em que o aluno diz que: “menos com menos dá mais”, ele está aplicando, na adição, uma regra que serve para a multiplicação e a divisão, ou seja, a regra não tem sentido para ele, ele não sabe por que menos com menos dá mais e utiliza-a em todas as situações em que ela aparece. O aluno trabalha com os números inteiros desde a 6ª série do Ensino Fundamental até a 3ª série do Ensino Médio, ou seja, durante seis anos cometendo o mesmo erro. Sem falar da universidade depois desse período.

Transcrevo, a seguir, um exemplo do livro de Morris Kline (1976), “O fracasso da Matemática Moderna”, para exemplificar o que pode levar os alunos ao erro ou ao insucesso na Matemática:

> Em uma aula de Matemática, a professora pergunta:
> Por que 2 + 3 = 3 + 2?
> Porque ambos são iguais a 5 – responderam os alunos sem hesitar.
> Não, a resposta exata é porque a propriedade comutativa da soma assim o sustenta (p. 15).

Aparece neste exemplo a concepção de aprendizagem matemática dessa professora, preocupada em valorizar o rigorismo das propriedades sem estar atenta em valorizar o pensamento do aluno. Deveria aproveitar, inclusive, para discutir a possibilidade de uma questão ter mais de uma resposta correta, ou poder ser analisada de diferentes formas, tomando o cuidado de não exigir que a sua seja a única resposta correta, fazendo com que os alunos pensem como ela.

A não compreensão do significado de uma regra faz com que o aluno a use de forma indiscriminada. Ele decora um mecanismo para ser aplicado em determinada situação e, quando identificada uma situação similar, aplica a regra. O aluno busca um padrão por ele conhecido para utilizá-lo na solução do problema apresentado.

No Ensino Médio, os alunos cometem os erros do tipo apresentado no Quadro 4 dentro de conteúdos como Progressões Aritméticas e Geométricas, Binômio de Newton, Geometria Espacial, entre outros. Comumente, os alunos apresentam dificuldades no desenvolvimento de questões relativas à Matemática básica.

Regras sem significado levam a erros e contribuem para uma formação Matemática sem sentido e sem aplicabilidade. E esse erro é prejudicial a todo o desenvolvimento do aluno e do pensamento matemático que está sendo formado.

O aluno muitas vezes reclama da correção dos professores dizendo: “Professora, eu só errei o sinal!”, como se esse símbolo tivesse pouca importância na leitura do resultado. Conforme Cury (2004), o aluno coloca de forma simplista a questão do seu erro:

> Um erro que parece pequeno e sem importância aos olhos dos alunos, como é o erro de sinal, pode trazer inúmeras dificuldades embutidas, em operações elementares ou na aplicação de fórmulas específicas. Entender qual é o problema, discuti-lo com os alunos, partir das respostas para construir novas perguntas, tudo isso pode esclarecer problemas não-resolvidos que se arrastam, às vezes, desde as séries iniciais (p.111).

Pode-se, portanto, utilizar o erro para discutir as regras e compreendê-las, fazendo paralelos entre regras da adição e multiplicação, por exemplo, e tornando claro para o aluno que a regra é a generalização específica de um conceito, mas ela é única e não pode ser utilizada de forma indiscriminada.

O erro pode ser usado como uma estratégia de aprendizagem para retomada de conceitos que não foram bem estruturados.

7.2 Erro envolvendo propriedades ou conceitos

O aluno, em diversas situações, conhece e compreende o conceito e suas propriedades, mas no momento em que é necessária a aplicação de elementos básicos da Matemática, ele comete erros como os apresentados no Quadro 4. De acordo com Gitirana (2003):

> Nem sempre o erro é originado de uma incompreensão ou de uma dificuldade. Muitas vezes, um conhecimento prévio impede que o aluno compreenda um outro conhecimento (p. 62).

Os exemplos a seguir ilustram situações de erros desse tipo cometidos pelo aluno:

➢ Determine o valor de x e a razão para que a seqüência (x+1, x, x+2) seja uma progressão geométrica (PG).

Os alunos utilizam a propriedade $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$ corretamente para encontrar o valor de x, ou seja, o conceito de razão está compreendido, mas após substituir os termos ocorrem várias simplificações erradas:

- $\frac{\cancel{x}}{x+1} = \frac{x+2}{\cancel{x}}$ simplifica x com x e faz:

$$(x + 1).(x + 2) = 1.1$$

$$x^2 + 2x + x + 2 = 1$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0$$

Resolve, então a equação do 2° grau pela fórmula de Bhaskara e encontra os valores de x. Ao fazer essa simplificação ele simplesmente "lembra" que é possível simplificar termos iguais, sem levar em conta em que condições isso é possível.

E mesmo tendo o conhecimento do conceito de PG, ele não testa, não analisa os resultados para verificar se os valores encontrados para "x" satisfazem a sua progressão e se são possíveis.

Uma outra versão de erro no mesmo problema:

- $\frac{\cancel{x}+2}{\cancel{x}} = \frac{x}{x+1}$ simplifica x com x e faz:

$$2 = \frac{x}{x+1}$$

$$2.(x + 1) = x$$

$$2x + 2 = x$$

$$2x - x = -2$$

$$x = -2$$

Qual a noção de proporcionalidade que esse aluno apresenta? Qual o significado de uma fração para ele? Qual a dificuldade de estender um conceito aplicado às frações numéricas para as frações algébricas?

Cury (2004) ressalta que tal erro

> [...] nos leva a considerar que a idéia de "cortar" elementos, introduzida no ensino fundamental como "modelo" para simplificações, não faz sentido para muitos alunos, ocasionando absurdos matemáticos [...] (p.127).

Geralmente, o professor mostra um exemplo numérico para que o aluno entenda ou enxergue com mais facilidade: $\frac{4+2}{2} = \frac{4}{2} + \frac{2}{2} = 2 + 1 = 3$ e não $\frac{4+\cancel{2}}{\cancel{2}} = 4$. Então, o aluno "entende" e logo mais comete o mesmo erro se o problema for literal. Como não tem sentido para o aluno, ele não percebe uma mesma propriedade para questões numéricas e literais.

Quais as vivências necessárias para que o aluno estruture um conceito? Será que, se o conceito de fração for bem formado, ele cometerá esse erro? Será que é suficiente exemplificar de forma numérica? Se os professores sabem que seus alunos irão cometer esse tipo de erro, por que não trabalham de uma forma diferente?

7.3 Erro envolvendo linguagem

Ao resolver um problema, o aluno se depara, em primeiro lugar, com a língua materna, a qual deverá ser traduzida para a linguagem matemática para então organizar a forma de solucionar o problema. Se, ao ler um problema, ele não conhecer um termo, ou não souber o que o conjunto de termos está querendo dizer, o que eles significam juntos, ele não conseguirá resolvê-lo. Observa-se, em exemplo retirado de Kline (1976, p.17), a professora inteiramente convencida da importância da precisão na linguagem perguntando aos alunos se certo número de pirulitos é igual a certo número de meninas, Ela formula a questão assim:

"– Verifiquem se o conjunto de pirulitos está em correspondência de um para um com o conjunto de meninas". Ela não obteve resposta dos alunos.

Esse exemplo mostra como uma linguagem inadequada pode levar o aluno ao erro ou a não conseguir solucionar um problema. Os alunos não entenderam a pergunta da professora.

A linguagem e o seu rigor têm fundamento, mas é preciso verificar o que se quer desenvolver com o aluno. Qual a Matemática que o aluno deve saber? Que pensamento matemático ele deve demonstrar?

Observe outro exemplo onde a linguagem dificulta a resolução do problema:

➢ Qual é a distância entre os centros de duas faces adjacentes de um cubo de aresta 4 cm?

Para resolver este problema o aluno precisa saber:

- O que é distância?
- O que é centro?

- O que é face?
- O que são faces adjacentes?
- O que é um cubo?
- O que é aresta?

Munido de todas estas definições, ele precisa modelar o seu problema, ou seja, colocar em símbolos (equacionar) todas as questões acima para chegar à solução.

Alguns desses termos ele já usou em outros momentos na própria Matemática. Por exemplo, cateto adjacente, pode fazer conexão com faces adjacentes. Mas muitas vezes ele não faz essas conexões, deixando de usar um conceito conhecido para resolver um novo desafio. No exemplo apresentado, a visão espacial, ou imaginar a situação, ou fazer um desenho auxilia no entendimento e na resolução do problema.

O mesmo problema poderia ter outro entendimento se escrito de outra maneira:

- Você está dentro de uma sala cúbica. As dimensões da sala são de 4m. Qual a distância entre o centro de duas paredes vizinhas?

Escrito desta forma, o problema parece mais familiar. Para que o aluno faça conexões, é preciso aproveitar as suas vivências para que, sozinho, ele organize o seu pensamento e resolva as questões propostas.

7.4 Erro envolvendo simbologia

A Matemática trabalha com uma linguagem própria repleta de símbolos que são formadores de sua estrutura. Portanto, quando o aluno está resolvendo uma questão ele precisa simbolizá-la. De acordo com Dienes (1975):

> O processo de aprendizagem é um processo psicológico, não um processo lógico, e uma seqüência logicamente ordenada, [sic] não dará, necessariamente, o melhor método para aprender uma estrutura (p.135).

Uma das funções do simbolismo é fixar a estrutura aprendida. Portanto, se o aluno não aprendeu a estruturar, não conseguirá trabalhar com os símbolos. Ao não expressar as suas idéias por meio de símbolos, ele comete erros. Um mesmo símbolo pode ser usado para diferentes situações, ou seja, quando representamos uma série de idéias através de um mesmo símbolo, é alcançada a generalização. Por exemplo, um número quadrado pode ser escrito como x^2 que é, ao mesmo tempo, algo abstrato (já que x pode representar qualquer objeto) e geral (qualquer objeto pode ser elevado ao quadrado). Esse objeto pode ser numérico ou literal.

O autor acima citado exemplifica como os símbolos podem auxiliar ou prejudicar a aprendizagem.

> Por exemplo, as notações $y = x^2$ e $f(x) = x^2$ não são necessariamente os melhores símbolos para expressar a idéia nascente de função; algo como $x \to x^2$ representaria melhor a situação. Dá certamente a expressão visual à correspondência entre x e x^2, indicando mesmo a direção desta correspondência (p.133).

O aluno precisa “enxergar” o que os símbolos estão transmitindo. Então, quando for possível amenizar as dificuldades nesse processo, deve-se fazê-lo.

7.5 Erro como metodologia

A forma de lidar com o erro pode ser diferente de professor para professor. Alguns reforçam o erro para que o aluno não o repita, outros partem dele para reconstruir o conceito. De acordo com Cury (1995), “os professores agem conforme suas concepções e crenças sobre a natureza da Matemática, sobre a melhor forma de ensiná-la e sobre o que significa aprender Matemática”. Os professores também agem assim a respeito da forma de lidar com o erro.

> Um erro corrigido (por ele mesmo) pode ser mais fecundo do que um acerto imediato, porque a comparação de uma hipótese falsa e suas conseqüências fornece novos conhecimentos e a comparação entre dois erros dá novas idéias (PIAGET, apud CURY, 1995, p.44).

Um dos objetivos deste trabalho é identificar se o erro é cometido pela falta de conhecimento matemático, pela falta de interesse em Matemática, pela falta de entendimento da linguagem matemática ou pela falta de conhecimento da simbologia matemática. Todos eles podem estar ligados a um ensino muitas vezes descontextualizado e com falta de significado. Falta uma reflexão na forma de ensinar e aprender Matemática, além de aproveitar momentos de sala de aula para rever estes erros, desenvolvendo, então, uma aprendizagem reflexiva e não construída por meio de modelos prontos ou aplicação de regras de forma mecânica.

Conforme Gitirana (2003):

> A prova ainda representa, na prática docente de muitos professores, o único significado de avaliação. Mesmo como instrumento de avaliação, é preciso que o professor pare para refletir sobre o que a resposta escrita do aluno numa prova pode lhe dizer sobre o seu desenvolvimento, suas estratégias, suas concepções, suas habilidades e que rumo tomar na continuidade de sua prática pedagógica. Muitas vezes, uma resposta errada não explicita ao

> professor o ponto que o está impedindo de chegar à resposta correta (p. 63).

O erro pode vir a ser uma metodologia para trabalhar todos os elementos acima citados e reconstruir conceitos matemáticos mal elaborados através da reflexão sobre erros cometidos.

7.6 Fechamento

Analisar os erros cometidos pelo aluno pode contribuir para a reconstrução de conceitos mal estruturados, não se deve utilizar o erro como elemento responsável pelo saber matemático do aluno. É preciso analisá-lo e usá-lo como ponte para esta reconstrução. Usá-lo como uma estratégia de ensino, e não como um quantificador do conhecimento.

Existem vários tipos de erros e vários motivos de por que eles são cometidos, mas o tratamento dado a eles é que poderá modificar a freqüência da sua ocorrência. Cometer erros em Matemática pode estar associado à linguagem, ao simbolismo, a conceitos mal elaborados, entre outros fatores.

Discutir com o aluno a respeito de seus erros, permitindo que ele expresse a sua forma de pensar, pode ser um caminho para que ele torne significativo um conceito que poderia estar sendo usado de forma mecânica e por meio de generalizações infundadas.

8 METODOLOGIA

Ao escolher o tema de uma pesquisa, o pesquisador já tem em mente alguns objetivos que pretende alcançar, tendo o cuidado de fazer ajustes caso seja necessário.

Fazer pesquisa envolve elementos internos e externos ao pesquisador. Internos, pois de uma certa maneira, ele coloca na pesquisa as suas concepções a respeito do método utilizado para a realização da mesma. Externos, pois para que a pesquisa seja imparcial, ele precisa analisar os dados na forma em que se apresentam, independentemente de suas concepções.

Partindo de um problema, a pesquisa busca, nas análises qualitativa e quantitativa, as possíveis causas do aparecimento do problema. Com base em teóricos e teorias já existentes, a pesquisa é fundamentada, pois o pesquisador precisa da teoria para orientar os seus passos durante a pesquisa e não perder tempo coletando dados excessivos e desnecessários.

8.1 Paradigma adotado

Fazer pesquisa, em geral, está ligado à busca do estudo de um problema. A pesquisa tem diferentes concepções nas diversas áreas do conhecimento. Houve uma época que a pesquisa consistia em observação e experimentação, e teorias e leis eram formuladas desta forma. O que não pudesse ser provado empiricamente não era considerado ciência. Grupos que defendiam esta idéia eram chamados de positivistas lógicos ou empiristas lógicos e consideravam a Ciência como o paradigma de todo o conhecimento. Hipóteses eram lançadas e deveriam ser testadas e experimentadas pelo método indutivo, ou seja, tirava-se uma conclusão a partir de várias observações, aceitando o resultado como lei.

Surgiu então uma nova corrente, defendendo a idéia de que nem todo fenômeno é possível de ser validado só pela observação, mas pressupõe uma interpretação, e por trás de uma observação existe uma teoria. Nesta mesma época, grupos colocaram-se também contrários ao método da indução que não pode ser justificado nem pela lógica, nem pela experiência. Novas idéias surgiram a respeito do conhecimento científico, as quais podem se dividir, de acordo com Borges (1996) em três categorias: idealismo, empirismo e construtivismo.

> **Idealismo** – O conhecimento encontra-se armazenado em nós, necessitando apenas ser descoberto através da introspecção.
> **Empirismo** – O conhecimento encontra-se fora de nós, é exterior e deve ser buscado. O empirismo evidencia-se, sobretudo, na visão tradicional sobre as ciências.
> O empirismo-indutivo baconiano, que ainda hoje é marcante na educação científica, supõe que a observação de fenômenos e a realização de experimentos precedem a formulação de teorias. Na visão indutivista, o método científico parte da observação à elaboração de hipóteses, seguida de experimentos (repetidos diversas vezes pelos pesquisadores) e conclusões, para chegar a teorias e leis.
> **Construtivismo** – O conhecimento não se encontra em nós, nem fora de nós, mas é construído, progressivamente, pelas interações que estabelecemos. As teorias (nossos conhecimentos, memórias e crenças) precedem observações, influenciando-as. Nesta perspectiva, a ciência é vista como um processo dinâmico e sujeito a mudanças (p.16 e 17).

Uma pesquisa pode surgir da curiosidade, da inquietação de um indivíduo na tentativa de solucionar ou averiguar um problema. Dados são coletados e analisados na busca do conhecimento científico. Uma atividade momentânea que é inserida numa corrente de pensamento pode representar um caráter social da pesquisa.

Lüdke e André (1986) salientam que:

> Para se realizar uma pesquisa é preciso promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas sobre determinado assunto e o conhecimento teórico acumulado a respeito dele. Em geral, isso se faz a partir do estudo de um problema, que ao mesmo tempo desperta o interesse do pesquisador e limita sua atividade de pesquisa a uma determinada porção do saber, a qual ele se compromete a construir naquele momento. Trata-se, assim, de uma ocasião privilegiada, reunindo o pensamento e a ação de uma pessoa, ou de um grupo, no esforço de elaborar o conhecimento de aspectos da realidade que deverão servir para a composição de soluções propostas aos seus problemas (p.1).

A presente pesquisa foi construída utilizando duas abordagens: qualitativa e quantitativa.

Bicudo (2004) afirma que é no campo dos significados que o quantitativo e o qualitativo se situam e salienta para a concepção quantitativa que:

> O *quantitativo* tem a ver com o *objetivo* passível de ser mensurável. Ele carrega consigo as noções próprias ao paradigma positivista, que destaca como pontos importantes para a produção da ciência a razão, a objetividade, o método, a definição de conceitos, a construção de instrumentos para garantir a objetividade da pesquisa. Embutida no seu significado está, também, a idéia de racionalidade entendida como quantificação (p. 103).

Para a concepção qualitativa, Bicudo (2004) afirma que:

> O *qualitativo* engloba a idéia de subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências, como, por exemplo, a vermelhidão do vermelho, etc, Entende-se que a noção de rigor não seria aplicável a dados qualitativos, uma vez que a eles faltaria precisão e objetividade, dificultando ou impossibilitando a aplicação de quantificadores (p.104).

As ciências usavam métodos quantitativos para a análise de seus dados até a década de 70, de acordo com Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2002). A partir desta época ganha força o chamado “paradigma qualitativo” o qual se definia por oposição ao positivismo, também utilizado para as ciências denominadas exatas.

Portanto, uma pesquisa não necessita seguir uma única abordagem. Existe, agora, espaço para criar e mesmo abordar problemas que antes não poderiam ser abordados, pois não se encaixariam nos métodos utilizados.

Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2002) afirmam que:

> Durante o período em que o paradigma positivista ou empirista lógico era hegemônico, a questão parecia simples: poderiam ser considerados científicos os conhecimentos obtidos pelo método científico, tal como este era definido naquele paradigma; os que não atendessem àquelas prescrições estariam fora do âmbito da ciência (p.120).

A abordagem qualitativa independente do método científico utilizado deve se basear na objetividade e na verdade para fazer a análise dos resultados, pois, sendo uma abordagem mais flexível, não permite um planejamento detalhado, já que este vai se formando no decorrer da pesquisa. E supõe o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo investigada. De acordo com Lüdke e André (1986), esse tipo de estudo é também chamado de naturalístico.

A abordagem quantitativa dá ênfase aos dados obtidos, é menos flexível, tem regras precisas que podem ser aplicadas em diversos casos, sendo o planejamento bastante estruturado.

Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2002) afirmam que:

> trabalhar de forma altamente indutiva, deixando que o *design* e a teoria emerjam dos dados, é difícil até mesmo para pesquisadores mais experientes. Quanto menos experiente for o pesquisador, mais ele precisará de um planejamento cuidadoso, sob pena de se perder num emaranhado de dados dos quais não conseguirá extrair qualquer significado (p. 148).

Esta pesquisa adotará uma abordagem qualitativa para analisar os sentimentos do aluno em relação à Matemática. A abordagem quantitativa será utilizada na análise dos dados coletados relativos à linguagem, simbologia e pensamento ligados à Matemática.

8.2 Sujeitos da pesquisa

A pesquisa foi feita com alunos das 2ª e 3ª séries do Ensino Médio. Estes alunos são oriundos de duas escolas da rede particular e três escolas da rede pública, sendo duas estaduais e uma municipal. Uma das escolas da rede pública é de uma cidade do interior do Estado, e as outras são de Porto Alegre.

As escolas são identificadas por A, B, C, D e E, sendo que:

Escola A: é uma escola composta por Berçário, Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio da rede particular de Porto Alegre, tem 1991 alunos, 123 professores e funciona nos turnos da manhã e tarde. A escola possui laboratórios de: Biologia, Química, Matemática, Línguas, Informática e História que são utilizados regularmente e com acompanhamento de estagiários para auxiliar professores e alunos. Há quatro laboratórios de informática com acesso à Internet. A língua estrangeira são o Inglês e o Alemão, no Ensino Fundamental, e no Ensino Médio, é possível escolher duas entre as opções: Inglês, Alemão e Espanhol. Possui uma biblioteca sempre com duas bibliotecárias presentes. Para a prática esportiva, a escola possui um ginásio de esportes coberto e canchas ao ar livre. Tem dois auditórios para reuniões e palestras. As famílias têm alto poder aquisitivo. A maioria dos alunos se dedica exclusivamente aos estudos, não precisando trabalhar, pois as famílias têm condições de prover o seu sustento.

Escola B: é uma escola de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio da rede particular de Porto Alegre, tem 1100 alunos, 60 professores e funciona nos turnos da manhã e da tarde. Possui laboratórios de: Biologia, Química, Física e Matemática – todos os laboratórios são utilizados regularmente, pois existe na carga horária dessas disciplinas um período com esta finalidade. A escola possui uma biblioteca usada por professores e alunos com quatro bibliotecárias e acesso a Internet. Possui dois laboratórios de informática com funcionários para auxiliar os professores no desenvolvimento de suas atividades. Possui um ginásio de esportes e canchas no pátio, os esportes são valorizados anualmente com jogos entre as séries. A língua estrangeira é Inglês no Ensino Fundamental e Inglês e Espanhol no Ensino Médio. A escola possui dois auditórios para palestras e reuniões. As famílias têm médio poder aquisitivo. A maioria dos alunos não trabalha e aqueles que trabalham, geralmente, o fazem com os pais.

Escola C: é uma escola de Ensino Fundamental, Médio e Curso Normal da rede pública de uma cidade do interior do Rio Grande do Sul. Tem 1000 alunos, 60 professores e funciona nos turnos da manhã, tarde e noite. Possui um laboratório de ciências, uma biblioteca e um laboratório de informática com 15 computadores e acesso à Internet. Possui canchas de esporte no pátio aberto. A língua estrangeira é o Inglês. As famílias têm baixo poder aquisitivo. Alguns alunos trabalham para auxiliar no sustento da família.

Escola D: é uma escola de Ensino Fundamental e Médio da rede pública de Porto Alegre, tem 1200 alunos, 80 professores e funciona nos turnos da manhã, tarde e noite. Possui um laboratório de Ciências que não é utilizado pela falta de material. Tem uma biblioteca usada por professores e alunos com um bibliotecário e dois ajudantes e um computador para a utilização dos alunos. O laboratório de informática tem apenas um computador. Não possui ginásio de esportes, as aulas de Educação Física são realizadas no pátio da escola onde existe uma cancha e uma área coberta com outra cancha. A língua estrangeira é o Inglês. A escola recebe verba do Estado para sua manutenção. No turno diurno, os alunos recebem merenda escolar, e no turno da noite não existe a merenda por falta de funcionários. No turno diurno, o poder aquisitivo dos alunos varia entre baixo e médio; no noturno, os alunos, em sua maioria, são trabalhadores.

Escola E: é uma escola de Ensino Médio, Curso Normal e Técnico em Contabilidade, da rede municipal de Porto Alegre, tem 1200 alunos, 68 professores e funciona no turno da noite. Entretanto, no turno da tarde, de forma opcional, e sob inscrição, são oferecidas oficinas de cerâmica, desenho, música, plantas medicinais e informática. A escola possui laboratórios de Física, Química, Biologia e Informática, este com acesso à Internet. Tem uma biblioteca. A escola depende de verbas para fazer melhorias. A língua estrangeira obrigatória é o Inglês nos primeiros 4 semestres. Nos 2 últimos o aluno pode optar entre o Francês e o Espanhol. A escola possui canchas esportivas descobertas no pátio da escola. No ensino noturno, a Educação Física não é obrigatória; a escola oferece atividades físicas no horário da tarde para quem quiser. O poder aquisitivo das famílias, em geral, é baixo. A maioria dos alunos são trabalhadores, sendo que muitos são estagiários.

A seleção dos 30 alunos nas turmas foi feita aleatoriamente, totalizando 150 entrevistados. Foram escolhidos 30 alunos por escola, por ser considerado um número razoável para tabulação e análise de dados, e com esta quantidade foi possível fornecer resultados consistentes, pois grande parte das variáveis quantitativas apresentaram um erro padrão pequeno.

A pesquisa foi feita nas Escolas A, B, C e D pelo(a) professor(a) titular da turma, sendo que nas Escolas A, B e C a professora titular é da disciplina de

Matemática e na Escola D, de Biologia. Já na Escola E, a pesquisa foi feita pela autora deste trabalho.

8.3 Procedimentos e instrumentos

Esta pesquisa teve como objetivo levantar os erros e tentar identificar causas que levam o aluno do Ensino Médio a cometer esses erros que estão ligados a conteúdos da Matemática que formam estudados no Ensino Fundamental.

A análise dos erros pretende identificar a causa que leva o aluno a cometer alguns tipos de erros e sugerir maneiras de reconstruir conceitos por meio deles, tornando-os significativos apesar de já estarem de alguma forma sedimentados.

Para buscar a origem de um conceito matemático errado ou mal elaborado, os alunos envolvidos na pesquisa responderam um questionário composto de três etapas: identificação, grau de concordância em relação a elementos ligados a Matemática e questões que envolvem problemas de linguagem, interpretação, simbologia, representações e regras.

Com o embasamento teórico e a coleta de dados, foram feitas as análises qualitativa e quantitativa. De posse dos resultados, foi elaborado um texto descritivo e interpretativo.

8.4 Atividades realizadas

A pesquisa foi realizada nos anos letivos de 2004 e 2005. Nas escolas já mencionadas, os alunos foram esclarecidos do teor da pesquisa e convidados a participar. Estes alunos resolveram questões de Matemática que envolvem conceitos trabalhados no Ensino Fundamental. As suas respostas foram tabuladas e categorizadas a fim de facilitar a análise dos dados.

8.5 Metodologia de análise

Os dados foram organizados em categorias, para a análise via abordagem qualitativa, que geralmente apresenta uma grande quantidade de dados que precisam ser organizados. A análise quantitativa consiste em organizar os dados em tabelas e gráficos e, posteriormente, determinar algumas correlações.

As teorias cognitivistas, apresentadas no capítulo 5 desta dissertação contribuíram para análise e na interpretação dos dados.

A concepção de seus teóricos sobre o desenvolvimento intelectual é também uma teoria da educação, estando a sua análise ligada às questões de linguagem, pensamento e aprendizagem, pois essas teorias acompanham a forma pela qual o desenvolvimento intelectual do aluno adquire uma estrutura classificatória que torna possível o uso da linguagem como um instrumento lógico e analítico do pensamento. Assim, por exemplo, como a forma de ensinar e a de aprender contribuem para a aquisição de novos conhecimentos, a teoria dos campos conceituais auxilia a compreender as conexões e rupturas entre os conhecimentos, e a teoria da aprendizagem significativa auxilia na organização das estruturas cognitivas do aluno visando a origem dos significados.

Essas teorias auxiliam na análise dos dados para verificar o quanto um conceito é significativo. Vygotsky explora o modo pelo qual os conceitos mais rigorosos de ciência e pensamento disciplinado têm o efeito de transformar e dar uma nova direção ao aparecimento dos conceitos “espontâneos” no aluno. Em geral, nas teorias cognitivistas, é possível observar o processo pelo qual uma nova informação se relaciona com um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do sujeito.

8.6 Fechamento

Ao fazer um estudo, o pesquisador leva consigo as suas teorias, as suas vivências e suas idéias prévias a respeito do que pretende fazer. Existem diversos métodos de se fazer pesquisa, ou mesmo concepções a respeito do assunto. A forma de se fazer uma pesquisa passou por diversos momentos históricos e diversas concepções filosóficas.

Os dados coletados em diferentes escolas, com diferentes realidades, servem para compor um painel de como a Matemática está sendo aprendida por alunos de realidades tão diferentes, de como ela está sendo trabalhada e qual é a relação que os alunos mantêm com ela. Também serve para analisar os tipos de erros que o aluno de cada realidade comete, tentar descobrir por que ele os comete, e apontar sugestões para melhorar o ensino da Matemática. Além disso, é possível fazer um comparativo entre as diversas escolas para verificar se o meio social tem influência na freqüência e nos tipos de erros cometidos.

A partir do panorama das escolas e do desempenho dos alunos nas questões solicitadas serão feitas uma análise comparativa e correlações para avaliar as possíveis causas que contribuem para o sucesso ou não do aluno na disciplina de Matemática.

Para que um conceito seja significativo, o aluno precisa compreender a linguagem, os símbolos e os pensamentos que são utilizados na sua formação. Em geral, os conceitos são construídos tomando como partida outros conceitos conhecidos que servirão como suporte para a compreensão do novo. O interesse, a disposição para aprender e a vontade de conhecer são elementos necessários na formação de novos conhecimentos e contribuem na construção da inteligência humana. O ser humano cria estruturas de ordem superior para dar novo sentido a um conhecimento já adquirido e às estruturas conceituais que já foram superadas.

9 ANÁLISE DOS DADOS

O instrumento de coleta de dados (Apêndice1) consiste em um questionário composto de três categorias. A primeira é formada pelos dados de identificação do respondente. A segunda tem onze afirmações a respeito de sentimentos e impressões sobre a Matemática, tendo o respondente uma escala de 0 a 5 para que apresente o seu grau de concordância ou discordâncias relativas às afirmações. Na terceira categoria, são apresentadas vinte questões divididas em sete blocos organizados da seguinte maneira:

- Bloco I: formado por cinco questões, cada uma com dez alternativas das quais cinco são corretas. Questões estas que pretendem medir o conhecimento do aluno quanto a aplicações da Matemática no dia-a-dia, se ele identifica termos da língua materna que são usados na Matemática, se ele identifica símbolos e se ele percebe um número ou um conceito de diferentes formas ou maneiras de escrita.
- Bloco II: formado por quatro questões, cada uma com cinco alternativas associativas. Nestas questões, são dados desenhos geométricos, expressões algébricas e unidades de medida. O aluno deve associar cada qual com o seu significado.
- Bloco III: formado por duas questões, cada uma com cinco alternativas para serem desenvolvidas. Neste bloco, uma das questões apresenta operações básicas, e a outra, diferentes tipos de equações.

- Bloco IV: formado por duas questões, cada uma com cinco alternativas, das quais apenas uma é correta. São questões que pretendem avaliar a capacidade de transformação de linguagens, ou seja, interpretação.
- Bloco V: formado por duas questões, cada uma com cinco alternativas, das quais uma é correta. Neste bloco, as questões pretendem medir a capacidade de leitura e interpretação de informações fornecidas em um gráfico.
- Bloco VI: formado por uma questão com cinco alternativas. Esta questão pretende verificar se o aluno transforma uma frase escrita na linguagem materna para a linguagem matemática.
- Bloco VII: formado por quatro questões, cada uma das quais deve ser desenvolvida separadamente. Essas questões pretendem avaliar se o aluno está atento aos dados do problema ou simplesmente opera com eles.

Esse instrumento de pesquisa foi aplicado em alunos de cinco escolas, quatro da capital e uma do interior. Das escolas da capital, duas são da rede particular e duas da rede pública (uma da rede estadual e outra da rede municipal). Em todas as escolas, o instrumento foi aplicado em alunos que estão cursando os 2° e 3° anos do Ensino Médio.

A primeira categoria do levantamento teve por objetivo conhecer o perfil do aluno e, por meio dele, observar o que pode vir a influenciar esse aluno na sua relação com os estudo e mais especificamente com a Matemática.

A segunda categoria teve por objetivo “medir” os sentimentos e a relação do aluno com a Matemática, verificar o que ele pensa a respeito da Matemática, o que ela representa no seu dia-a-dia e na sua vida escolar.

A terceira categoria do levantamento teve por objetivo verificar as percepções do aluno por meio de suas vivências escolares ligadas à Matemática, visto serem alunos praticamente concluintes do Ensino Médio. Pretendia-se verificar também que elementos influenciam no seu sucesso ou não na Matemática. Esses elementos foram organizados em blocos que incluem: linguagem, simbologia, conteúdo, interpretação e resolução e análise de problemas.

Esse questionário foi elaborado após discussão sobre tipos de questões que permitiriam visualizar as possíveis causas ou pontos que levam o aluno a ter um bom ou mau desempenho na Matemática, levando em consideração os erros mais freqüentes cometidos pelo aluno em conteúdos desenvolvidos no Ensino Fundamental e utilizados no Ensino Médio. As indagações a seguir mostram quais elementos auxiliaram na construção desse instrumento.

1- Sentimentos positivos em relação à Matemática interferem na aprendizagem?

2- O ensino mecânico e repetitivo via modelos prontos desenvolve o pensamento matemático?

3- O uso de regras sem significado afeta o entendimento da Matemática?

4- A dificuldade em Matemática pode estar ligada com a linguagem materna?

5- A forma de ensinar pode melhorar o desempenho em Matemática?

As questões propostas no instrumento de pesquisa têm o objetivo de analisar estes questionamentos como forma de tentar melhorar o ensino da Matemática.

9.1 Análise das categorias

Para analisar as questões do instrumento da pesquisa, foram usadas três categorias, sendo cada uma examinada de forma quantitativa ou qualitativa, dependendo da questão.

A primeira categoria refere-se aos dados biométricos dos alunos; a segunda pretende analisar o tipo de relação que o aluno tem com a Matemática; e a terceira analisa as questões que têm uma relação direta ou indireta com os conteúdos matemáticos que são identificados pela autora como potenciais geradores de erros pelos alunos, em geral.

Categoria 1: Variáveis biométricas.

Esta categoria permite investigar algumas características dos alunos que responderam o questionário. Variáveis que fazem parte desta categoria são: idade, série em que estuda, sexo, matéria preferida e escolaridade do pai e da mãe.

Nessa categoria, o enfoque se dá sob a influência desses elementos na vida escolar do aluno e no seu desempenho na Matemática. Os dados são tabulados e apresentados de forma isolada para a percepção de cada parte. Também algumas variáveis serão cruzadas para possibilitar uma análise do relacionamento entre elas.

Dessa categoria fazem parte:

- Idade
- Série
- Sexo

- Matéria preferida
- Escolaridade dos pais

Tabela 1 – Idade dos alunos – Escolas A a E – 2005

Idade	Número de alunos	% de alunos
15	39	26,0
16	47	31,3
17	32	21,3
18	16	10,7
19	2	1,3
20	3	2,0
21	4	2,7
22	1	0,7
24	1	0,7
26	1	0,7
28	1	0,7
29	1	0,7
35	1	0,7
36	1	0,7
Total	150	100

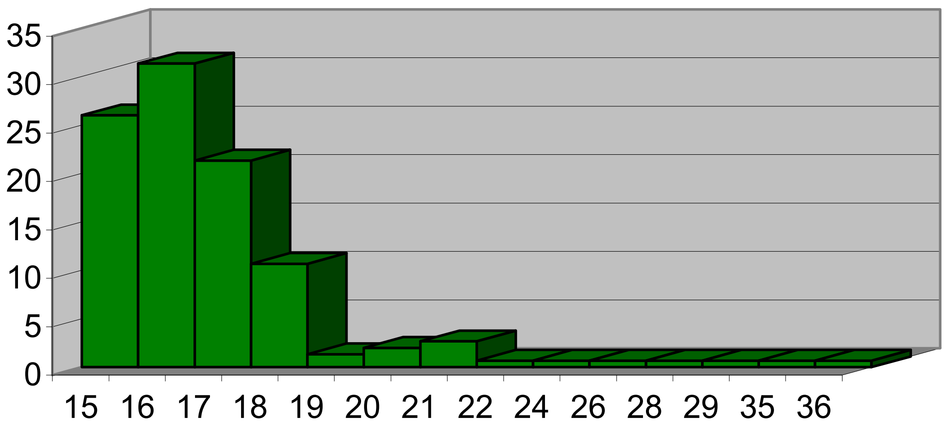


Gráfico 1 – Idade dos alunos – Escolas A a E – 2005

A tabela 1 e o gráfico 1 apresentam as idades dos alunos que responderam os questionários, sendo que 78,6% têm de 15 a 17 anos, idade em que, em geral, os alunos estão cursando esta série.

Tabela 2 – Série do aluno – Escolas A a E – 2005

Série	Número de alunos	% de alunos
2	118	78,7
3	32	21,3
Total	150	100,0

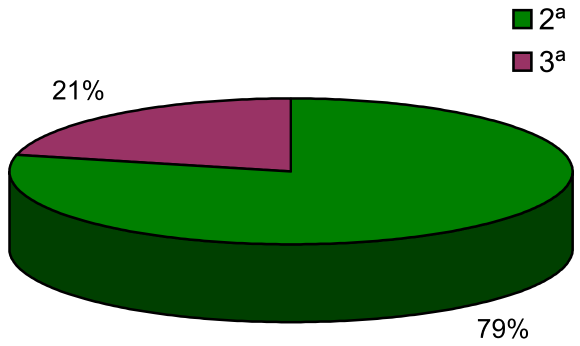


Gráfico 2 – Série do Ensino Médio – Escolas A a E – 2005

A tabela 2 apresenta a série que o aluno está cursando. Foram escolhidas as séries finais com o objetivo de analisar o desempenho dos alunos concluintes do Ensino Médio diante de questões que envolvem a Matemática do Ensino Fundamental. Nessa etapa, teoricamente, os alunos já estudaram a maioria dos conteúdos de Matemática desenvolvidos na escola.

Tabela 3 – Sexo – Escolas A a E – 2005

Sexo	Número de alunos	% de alunos
F	82	54,7
M	68	45,3
Total	150	100

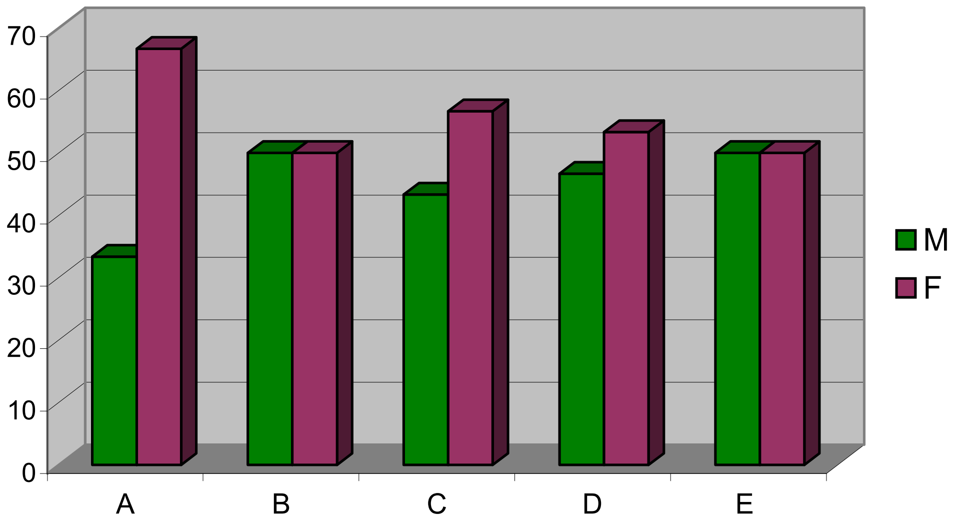


Gráfico 3 – Sexo dos alunos por escola – Escolas A a E – 2005

A tabela 3 aponta que 54,7% dos questionários foram respondidos por mulheres. No gráfico 3, é possível perceber esta distribuição por escolas.

Tabela 4 – Escolas de A a E – 2005

Escola	Número de alunos	% de alunos
A	30	20
B	30	20
C	30	20
D	30	20
E	30	20
Total	150	100

A tabela 4 mostra que o questionário foi respondido em 5 escolas diferentes e que a quantidade de alunos é igual em todas elas.

Tabela 5 – Matéria preferida do aluno – Escolas de A a E – 2005

Matéria preferida	Número de alunos	% de alunos
Artes	5	3,3
Biologia	24	16,0
Educação física	6	4,0
Física	8	5,3
Geografia	7	4,7
História	24	16,0
Informática	4	2,7
Inglês	4	2,7
Literatura	5	3,3
Matemática	34	22,7
Português	6	4,0
Química	4	2,7
Sociologia	2	1,3
Não respondeu	17	11,3
Total	150	100,0

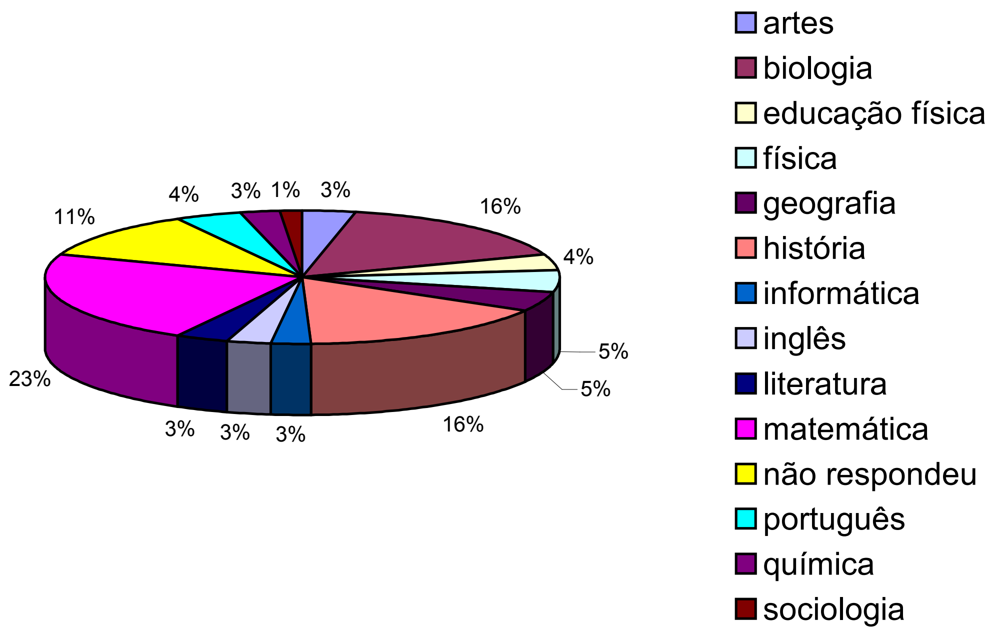


Gráfico 4 – Matéria preferida dos alunos. – Escolas de A a E – 2005

A tabela 5 e o gráfico 4 mostram a preferência do aluno por uma das disciplinas trabalhadas na sua escola. A Matemática aparece como a preferida por 22,7% dos alunos, seguida por História e Biologia com 16% cada uma. Juntando a Matemática, História, Biologia e os que não responderam, obtém-se 66% dos alunos, sobrando 34% para o restante das disciplinas.

A tabela 6 mostra que 48% dos pais têm no máximo o segundo grau completo, enquanto 51,3% das mães cursaram no máximo o segundo grau. Pode-se observar também que 28% dos pais têm ensino superior contra 31,3% das mães. O número de pais e de mães com pós-graduação é reduzido, respectivamente, 5,4% e 4%.

Tabela 6 – Escolaridade do pai e da mãe – Escolas A a E – 2005

	Escolaridade da mãe						
Escolaridade do pai	1G	2G	3G	E	M	NR	Total
1G	23,3	2,0	2,7			0,7	28,7
2G	1,3	12,0	6,0				19,3
3G		8,0	18,0	1,3	0,7		28,0
D			0,7				0,7
E			2,0	1,3			3,3
M		0,7			0,7		1,3
NR	3,3	0,7	2,0			12,7	18,7
Total	28,0	23,3	31,3	2,7	1,3	13,3	100,0

1G: primeiro grau, 2G: segundo grau, 3G: terceiro grau, D: doutorado, E: especialização, M: mestrado e NR: não respondeu.

Categoria 2: Relação Aluno - Matemática.

Nesta categoria, os alunos apresentam suas impressões, seus sentimentos em relação à Matemática que estão ligados com a sua vivência com essa disciplina, numa escala de 6 pontos (0 a 5), indicando o seu grau de concordância com cada afirmativa. Convencionou-se 0: discordo totalmente e 5: concordo totalmente. Para os alunos que não responderam, foi usada a notação (nr). Como critério para a análise dos dados será dada ênfase aos extremos 0 e 5. Apresentando certas ponderações quando se fizer necessário.

Estas impressões fazem referências às afirmativas:

- Você gosta de estudar.
- A Matemática desperta o teu interesse.
- A Matemática é útil no dia a dia.
- A Matemática é uma disciplina agradável.
- A Matemática é difícil.
- A Matemática estudada em cada série é utilizada nas séries seguintes.
- A Matemática é utilizada em outras disciplinas.
- O pensamento matemático é diferente de outros tipos de pensamentos.
- Compreender a linguagem matemática auxilia no entendimento da própria Matemática.
- Conhecer os símbolos matemáticos é suficiente para se saber Matemática.

Cada afirmativa foi escolhida com o objetivo de identificar como o aluno se relaciona com a Matemática como disciplina escolar, vivência no seu dia-a-dia, ferramenta para outras áreas do conhecimento, e ainda, se o aluno a percebe como linguagem e pensamento diferenciado.

Em geral, é possível perceber que a maioria tem uma relação positiva com os estudos e a escola. Tem noções da importância, aplicabilidade e uso da Matemática na escola e fora dela, percebendo-a em outras disciplinas ou no seu cotidiano.

Vêem a Matemática como uma forma de pensamento e com uma linguagem própria, mas compreendem que não basta conhecer os seus símbolos para desenvolver os mecanismos do pensamento matemático.

Estes sentimentos aparecem nas diferentes escolas, sejam públicas ou privadas. O desempenho pode até ser diferente, mas os sentimentos são bastante semelhantes. As tabelas e os gráficos a seguir apresentam os resultados dessa percepção.

Tabela 7 – Gostar de estudar – Escolas de A a E – 2005

Você gosta de estudar	**Número de alunos**	**% de alunos**
0	12	8,0
1	10	6,7
2	26	17,3
3	48	32,0
4	18	12,0
5	34	22,7
Nr	2	1,3
Total	150	100,0

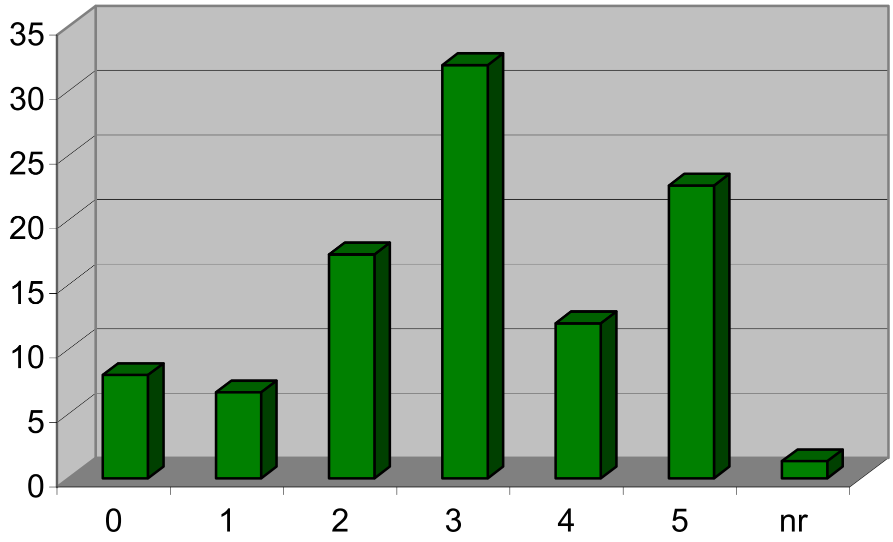


Gráfico 5 – Gostar de estudar – Escolas A a E – 2005

Na tabela 7 e no gráfico 5, observa-se que 22,7% dos alunos gosta de estudar. A relevância desse questionamento é que, se o aluno não gosta de estudar, ele terá baixo rendimento em qualquer disciplina, e não só em Matemática. No caso, portanto, 49,3% (17,3% + 32%) dos alunos dá um valor mediano para o estudo, sendo 8% o total dos que não gostam de estudar.

Tabela 8 – Interesse na Matemática – Escola A a E – 2005

A matemática desperta o teu interesse	Número de alunos	% de alunos
0	12	8,0
1	14	9,3
2	28	18,7
3	30	20,0
4	34	22,7
5	29	19,3
Nr	3	2,0
Total	150	100,0

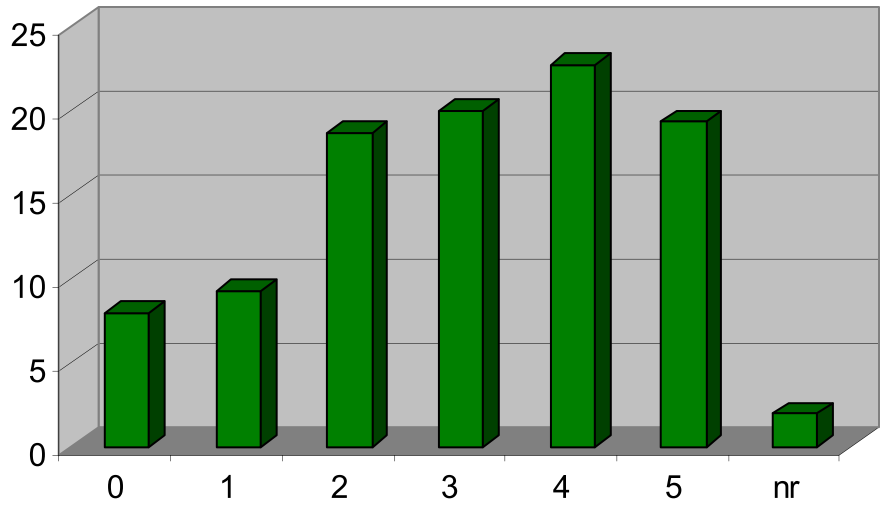


Gráfico 6 – Matemática e interesse – Escolas de A a E – 2005

A tabela 8 e gráfico 6 mostram que, para 42% dos alunos, a Matemática desperta o interesse. 17,3% dos alunos esta disciplina não desperta o interesse e 38,7% dos alunos têm um interesse mediano. Portanto, o desempenho nesta disciplina não está, necessariamente, associado ao interesse pela mesma, já que pode ocorrer de alunos terem interesse, mas não ter um bom desempenho e também terem interesse e ter um bom desempenho.

Tabela 9 – Matemática na escola – Escolas de A a E – 2005

A matemática deve ser estudada na escola	Número de alunos	% de alunos
0	4	2,7
1	5	3,3
2	4	2,7
3	10	6,7
4	24	16,0
5	101	67,3
Nr	2	1,3
Total	150	100,0

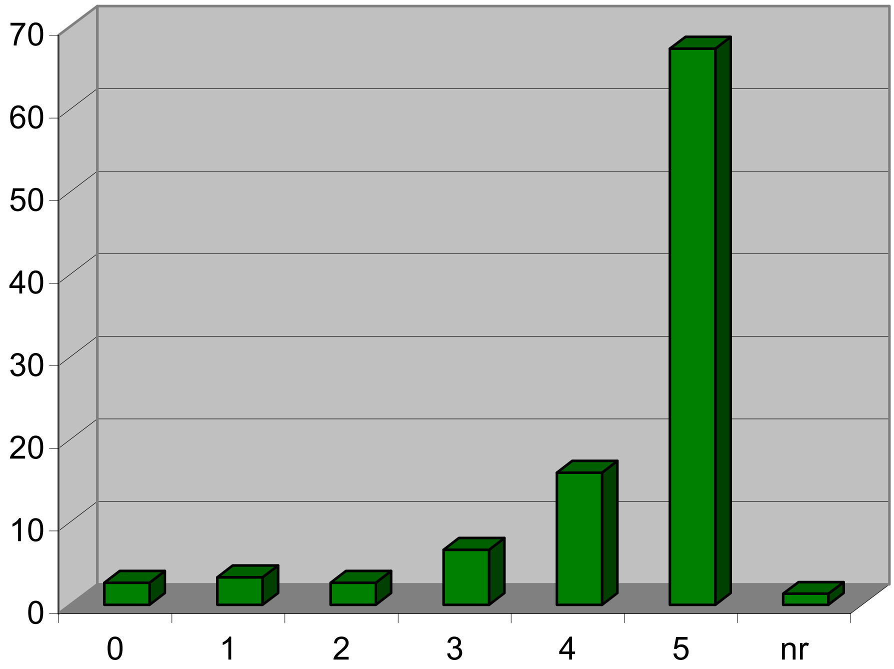


Gráfico 7 – Estudar Matemática? – Escolas de A a E – 2005

Na tabela 9 e no gráfico 7, pode-se perceber que 67,3% dos alunos pensam que Matemática deve ser estudada na escola e 2,7% pensam que não deve.

Tabela 10 – Matemática no dia a dia – Escolas A a E – 2005

A matemática é útil no dia a dia	Número de alunos	% de alunos
0	1	0,7
1	3	2,0
2	6	4,0
3	18	12,0
4	30	20,0
5	87	58,0
Nr	5	3,3
Total	150	100,0

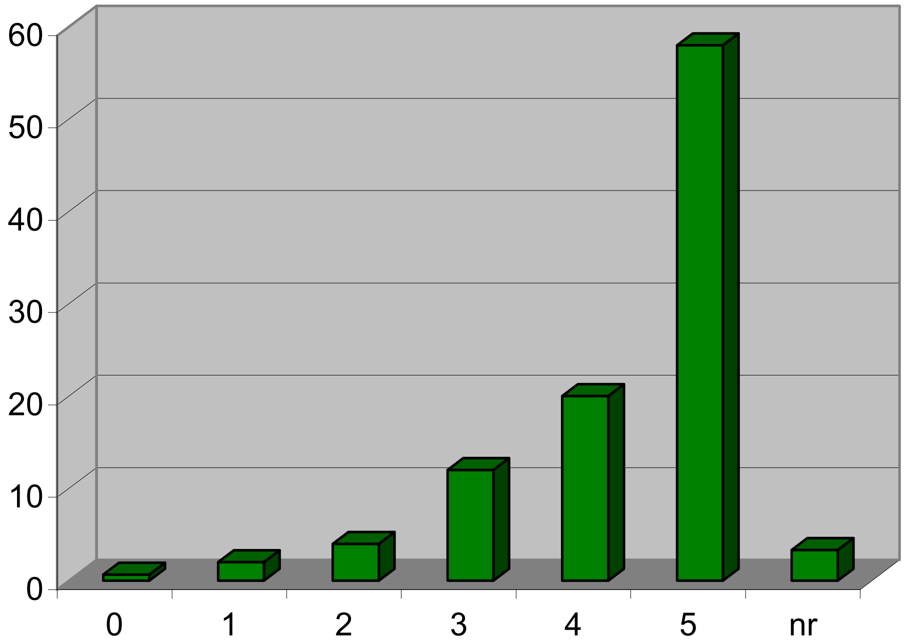


Gráfico 8 – Matemática útil – Escolas A a E – 2005

Em geral, os alunos pensam que a Matemática é útil no dia-a-dia, ou seja, 58% percebem a sua aplicação, o seu uso no cotidiano. Isso é pode ser observado na tabela 10 e no gráfico 8.

Tabela 11 – Disciplina agradável – Escolas de A a E – 2005

A matemática é uma disciplina agradável	Número de alunos	% de alunos
0	16	10,7
1	17	11,3
2	29	19,3
3	37	24,7
4	24	16,0
5	25	16,7
Nr	2	1,3
Total	150	100,0

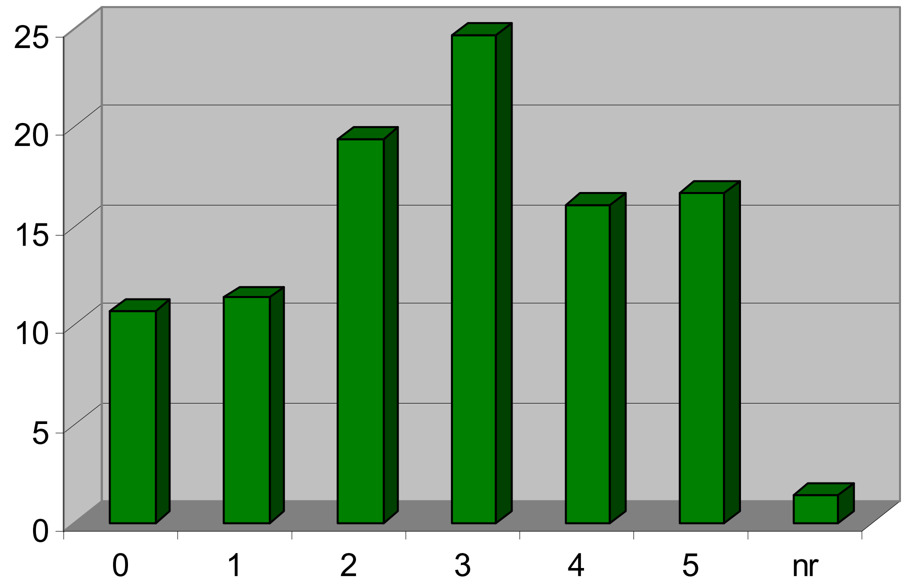


Gráfico 9 – Matemática agradável? – Escolas de A a E – 2005

Na tabela 11 e no gráfico 9, é possível observar que 16,7% dos alunos acham a Matemática uma disciplina agradável, e 10,7% discorda totalmente disso. Considerando os escores 3 e 4 como positivos, eles representam 40,7% dos alunos avaliando a Matemática como uma disciplina agradável. E considerando os escores 1 e 2 como negativos, 30,6% dos alunos não percebem a Matemática como uma disciplina agradável.

Tabela 12 – Matemática é difícil – Escolas A a E – 2005

A matemática é difícil	Número de alunos	% de alunos
0	11	7,3
1	16	10,7
2	15	10,0
3	34	22,7
4	21	14,0
5	49	32,7
Nr	4	2,7
Total	150	100,0

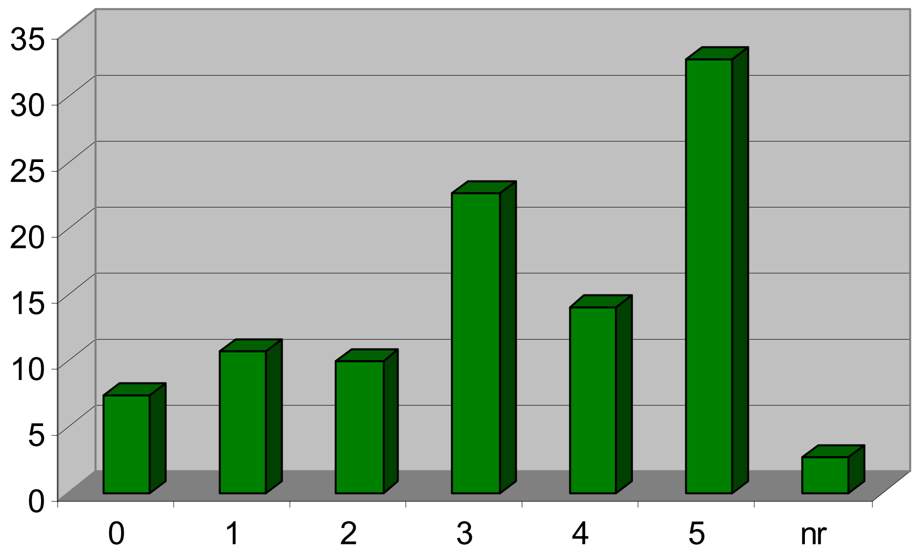


Gráfico 10 – Matemática é difícil? – Escolas A a E – 2005

Na tabela 12 e no gráfico 10, é possível observar que 32,7% acham Matemática uma disciplina difícil, contra 7,3% que pensa o contrário. No geral, é possível perceber que os alunos acham a Matemática uma matéria mais difícil do que fácil.

Tabela 13 – Matemática e as séries seguintes – Escolas A a E – 2005

A matemática estudada em cada série é utilizada nas séries seguintes	Número de alunos	% de alunos
0	3	2,0
1	1	0,7
2	2	1,3
3	13	8,7
4	36	24,0
5	92	61,3
Nr	3	2,0
Total	150	100,0

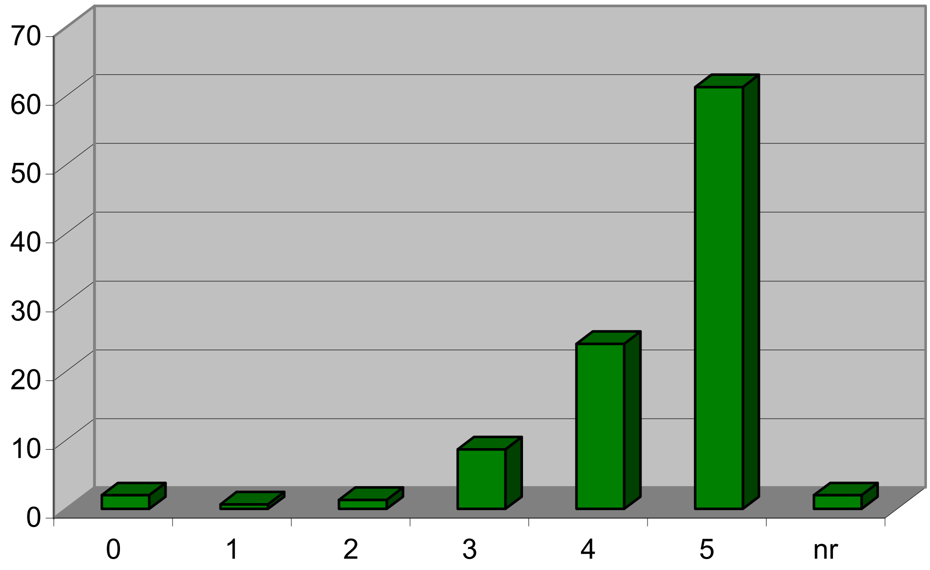


Gráfico 11 – Matemática é usada nas séries seguintes? – Escolas A a E – 2005

Na tabela 13 e no gráfico 11, mostra-se que 61,3% dos alunos observam que a Matemática aprendida em uma série é usada nas séries seguintes. E 2% dos alunos discordam disso.

Tabela 14 – Matemática e as outras disciplinas – Escolas A a E – 2005

A matemática é utilizada em outras disciplinas	Número de alunos	% de alunos
0	4	2,7
1	4	2,7
2	8	5,3
3	23	15,3
4	27	18,0
5	79	52,7
Nr	5	3,3
Total	150	100,0

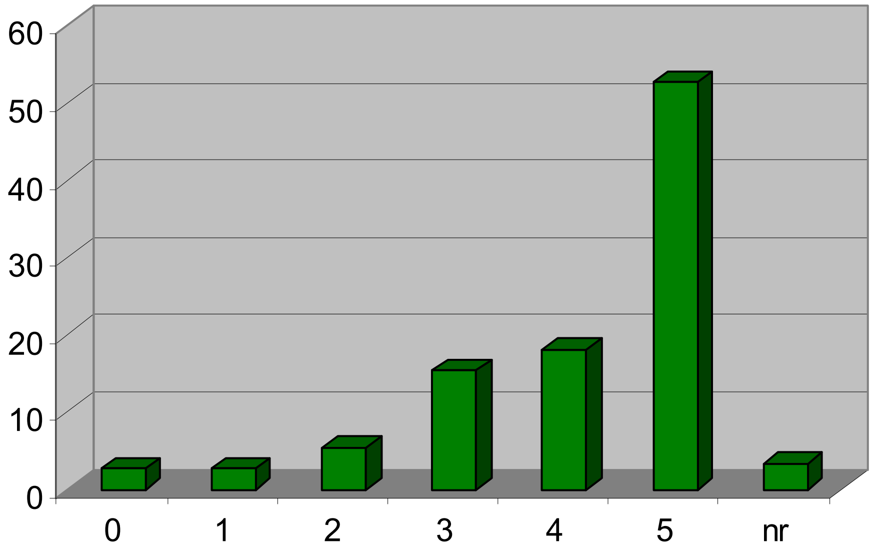


Gráfico 12 – A matemática usada em outras disciplinas – Escolas A a E – 2005

Na tabela 14 e no gráfico 12, é possível observar que 52,7% dos alunos identificam a Matemática em outras disciplinas, enquanto 2,7% dos alunos que não têm essa percepção.

Tabela 15 – Pensamento matemático – Escolas A a E – 2005

O pensamento matemático é diferente de outros tipos de pensamentos	Número de alunos	% de alunos
0	17	11,3
1	9	6,0
2	20	13,3
3	42	28,0
4	23	15,3
5	36	24,0
Nr	3	2,0
Total	150	100,0

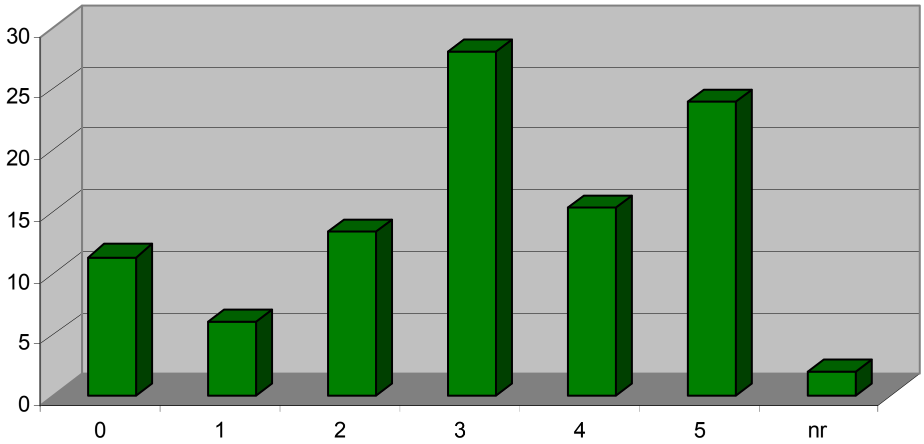


Gráfico 13 – O pensamento matemático é diferente? – Escolas A a E – 2005

Na tabela 15 e no gráfico 13, observa-se que os alunos, em geral, percebem a Matemática como uma forma de pensamento diferente. São 24% que concordam totalmente com isto contra 11,3% que discordam totalmente. Considerando o valor 3 como mediano é possível observar que 28% (o maior valor observado) dos alunos ficam no meio termo em ver a matemática como uma forma de pensamento diferente de outros tipos de pensamento, ou seja, parece que eles têm dúvida sobre esta afirmação ou ainda, ela não está bem clara.

Tabela 16 – Linguagem matemática – Escolas A a E – 2005

Compreender a linguagem matemática auxilia no entendimento da própria matemática	Número de alunos	% de alunos
0	5	3,3
1	2	1,3
2	7	4,7
3	19	12,7
4	23	15,3
5	92	61,3
Nr	2	1,3
Total	150	100,0

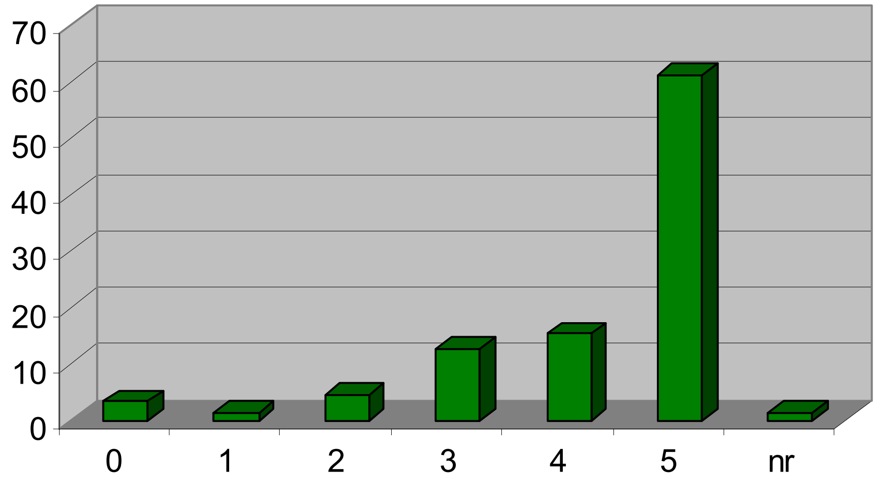


Gráfico 14 – A matemática como linguagem – Escolas A a E – 2005

Na tabela 16 e no gráfico 14, é possível observar que 61,3% dos alunos pensam que dominar ou conhecer a linguagem matemática auxilia no entendimento da mesma, enquanto 3,3% dos alunos discordam totalmente dessa idéia.

Tabela 17 – Símbolos matemáticos – Escolas A a E – 2005

Conhecer os símbolos matemáticos é suficiente para se saber matemática	**Número de alunos**	**% de alunos**
0	70	46,7
1	22	14,7
2	31	20,7
3	14	9,3
4	5	3,3
5	7	4,7
Nr	1	0,7
Total	150	100,0

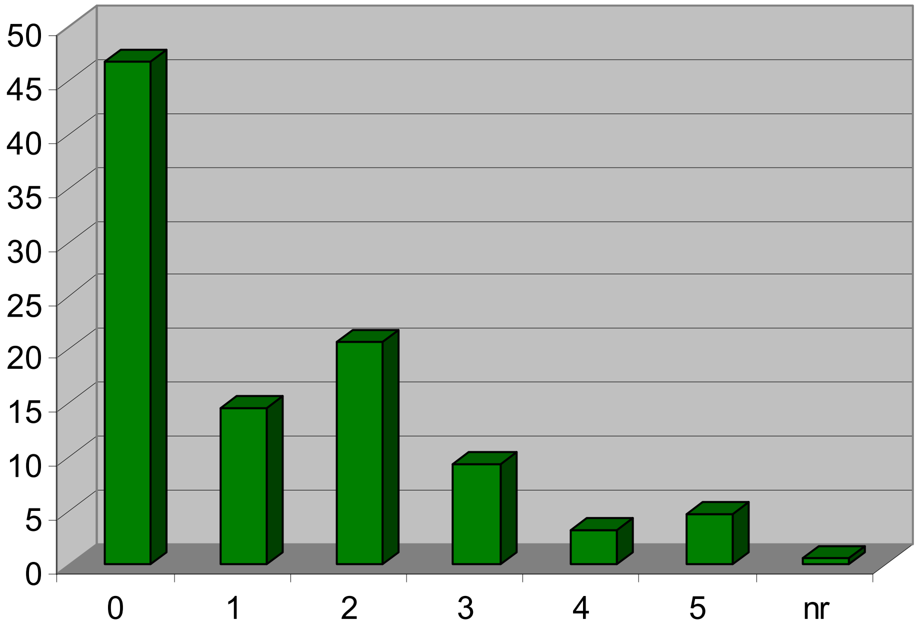


Gráfico 15 – A matemática e os símbolos – Escolas A a E – 2005

Na tabela 17 e no gráfico 15, pode-se notar que 46,7% dos alunos têm consciência de que não é suficiente conhecer os símbolos matemáticos para saber Matemática. Entretanto, 4,7% pensam que é suficiente.

<u>Categoria 3: Linguagem, simbologia e interpretação.</u>

Essa categoria é formada por questões que pretendem verificar o conhecimento do aluno em relação à aplicabilidade de conceitos básicos da Matemática, seus termos e seus símbolos.

Os dados nesta categoria foram organizados de acordo com o número de acertos em cada questão. Da Questão 1 a Questão 5, Bloco I, o aluno escolhe as alternativas que ele considera corretas. Cada questão tem dez alternativas sendo cinco corretas. Como critério, nestas questões a análise das tabelas e dos gráficos foi feita sobre os extremos: 0 acertos e 5 acertos. Os dados intermediários não foram desconsiderados, mas utilizados em análises que pareceram pertinentes.

Questão1*: Você usa Matemática:

a) para ir à lua
b) para pentear o cabelo
c) fazendo compras no supermercado
d) para visitar um amigo
e) nas aulas de história
e) no vestibular
f) para assistir televisão
g) para tocar um instrumento musical
h) para usar a internet
i) para cozinhar

Tabela 18 – O uso da matemática – Escolas A a E – 2005

Acertos na Questão 1	Número de alunos	% de alunos
0	10	6,7
1	23	15,3
2	30	20,0
3	49	32,7
4	28	18,7
5	10	6,7
Total	150	100,0

* Esta questão foi desconsiderada, pois é inconsistente, já que mais de cinco alternativas poderiam ser consideradas corretas.

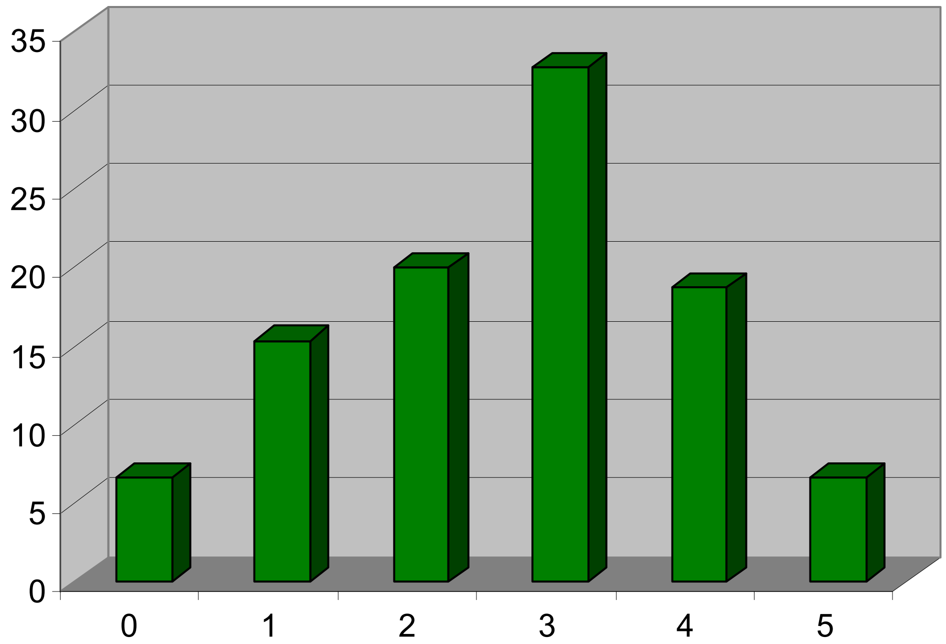


Gráfico 16 – Uso da Matemática – Escolas A a E – 2005

Essa questão pretende verificar se o aluno percebe o uso da Matemática no seu dia a dia, ou ainda, em que tipo de atividade a Matemática é usada. 6,7% dos alunos não identificaram nenhuma e 6,7% identificaram cinco alternativas corretas. A maioria dos alunos, 32,7% identifica três alternativas corretas.

Questão2: Identifique os termos usados na Matemática:

a) algarismo
b) fotografia
c) chuva
d) triângulo
e) borracha
f) produto
g) mercadoria
h) diferença
i) racional
j) compras

Tabela 19 – Termos matemáticos – Escolas A a E – 2005

Acertos na Questão 2	Número de alunos	% de alunos
0	4	2,7
1	5	3,3
2	4	2,7
3	8	5,3
4	24	16,0
5	105	70,0
Total	150	100,0

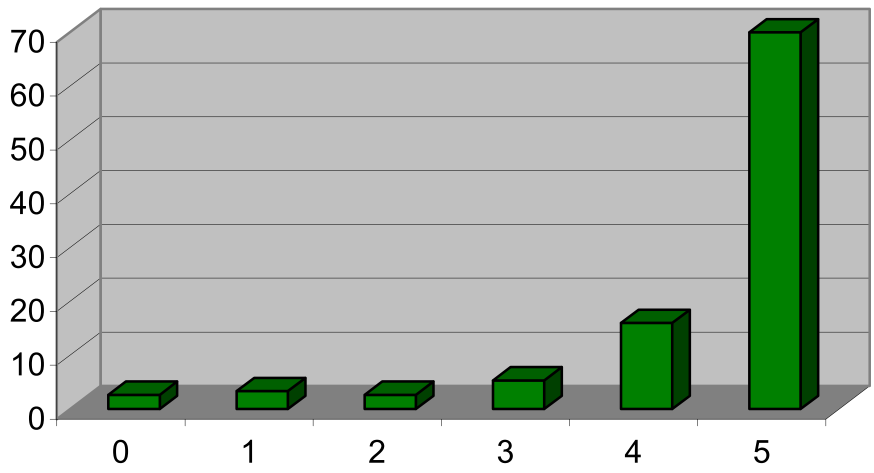


Gráfico 17 – Termos usados na Matemática – Escolas A a E – 2005

A tabela 19 e o gráfico 17 mostram que 70% identificaram os termos utilizados na Matemática. Ter desempenho satisfatório em Matemática acarreta conhecer a sua linguagem, os seus termos e seus significados, mas esses elementos isolados não são suficientes para o entendimento da mesma.

Questão 3: Identifique os símbolos usados na Matemática:

a) 4

b) ♬

c) &

d) ∉

e) π

f) @

g) ∞

h) ✣

i) ≠

j) ♥

Tabela 20 – Símbolos – Escolas A a E – 2005

Acertos na Questão 3	Número de alunos	% de alunos
0	1	0,7
1	4	2,7
2	2	1,3
3	20	13,3
4	35	23,3
5	88	58,7
Total	150	100,0

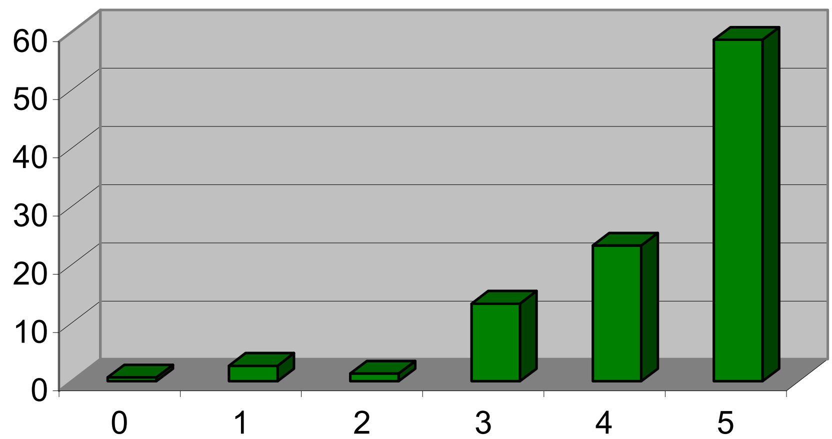


Gráfico 18 – Símbolos usados na Matemática – Escolas A a E – 2005

Na tabela 20 e no gráfico 18, pode-se observar que, em geral, 58,7% dos alunos reconheceram os cinco símbolos usados na Matemática, e 23,3% dos alunos identificaram quatro símbolos. 0,7% que representa, um aluno, não identificou nenhum dos símbolos apresentados.

Questão 4: O número 0,2 pode ser escrito ainda como:

a) $\frac{1}{5}$

b) –2

c) 2%

d) $\frac{4}{2}$

e) $\frac{2}{10}$

f) 20%

g) $\frac{3}{2}$

h) $\frac{20}{100}$

i) $\sqrt{0,04}$

j) 0,02

Tabela 21 – "Sinônimos" – Escolas A a E – 2005

Acertos na Questão 4	Número de alunos	% de alunos
0	32	21,3
1	40	26,7
2	9	6,0
3	18	12,0
4	28	18,7
5	23	15,3
Total	150	100,0

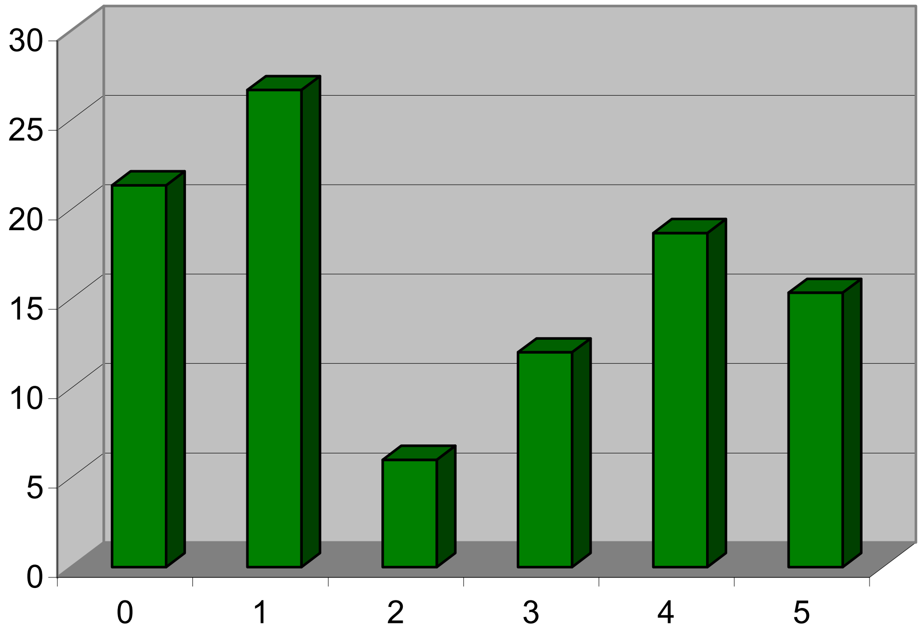
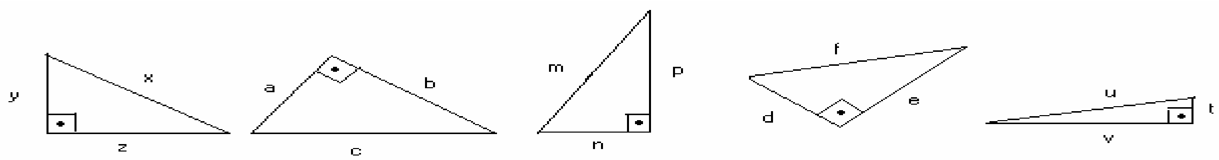


Gráfico 19 – Representações do 0,2 – Escolas A a E – 2005

A Matemática tem uma linguagem própria, e, assim como a língua materna, apresenta sinônimos na sua estrutura. Um número pode ser escrito de diferentes maneiras e apresentar um mesmo significado. Esta questão pretende verificar se o aluno percebe esses sinônimos, ou ainda se consegue expressar ou identificar uma idéia numérica de diferentes maneiras. No caso, 15,3% dos alunos identificaram as cinco maneiras diferentes de representação do número 0,2, ao passo que, 26,7% identificaram só uma forma. Pode-se observar também que 21,3% não identificaram o número 0,2 escrito de outra forma.

Questão 5: Em quais casos está correto o uso do teorema de Pitágoras



a) $x^2 = y^2 + z^2$

b) $a^2 = b^2 + c^2$

c) $p^2 = m^2 - n^2$

d) $f^2 = d^2 . e^2$

e) $t^2 = v^2 . u^2$

f) $c^2 = a^2 + b^2$

g) $d^2 = f^2 - e^2$

h) $m^2 = p^2 - n^2$

i) $u^2 = v^2 + t^2$

j) $y^2 = x^2 + z^2$

Tabela 22 – Teorema de Pitágoras – Escolas A a E – 2005

Acertos na Questão 5	Número de alunos	% de alunos
0	47	31,3
1	36	24,0
2	11	7,3
3	43	28,7
4	7	4,7
5	6	4,0
Total	150	100,0

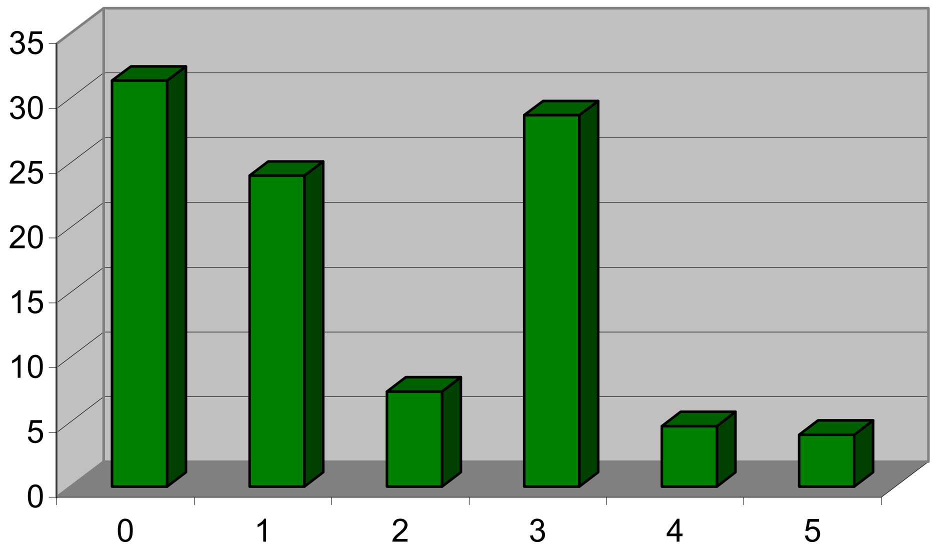
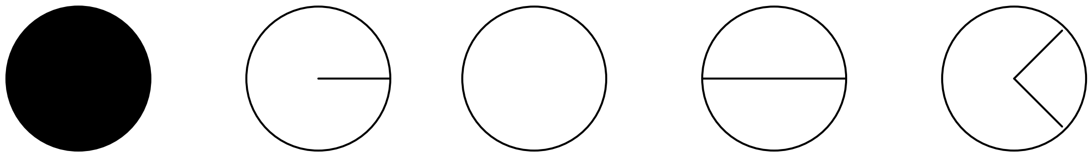


Gráfico 20 – Teorema de Pitágoras – Escolas A a E – 2005

O Teorema de Pitágoras é utilizado para resolver diversos problemas nos mais variados conteúdos da Matemática, seja no Ensino Fundamental, no Ensino Médio ou no Ensino Superior. Esta questão pedia que o aluno identificasse nos triângulos retângulos desenhados em diferentes posições quais alternativas estariam representando a aplicação desse teorema. Em geral são usadas as letras *a* para hipotenusa, e *b* e *c* para os catetos, sendo o triângulo desenhado numa posição específica. Mudando-se as letras para indicar os seus lados e desenhando em posições diferentes da convencional, é possível observar que a maioria dos alunos, ou 31,3%, não identifica a aplicação do teorema, e que 4% dos alunos percebem todas as diferentes formas de apresentar o teorema. Percebe-se que o ensino não está explorando as diferentes formas de expressar uma mesma idéia. Na tabela 22 e no gráfico 19, é possível visualizar essa situação.

Da Questão 6 a Questão 9 o aluno faz a associação entre desenhos geométricos e suas nomenclaturas, expressões algébricas e sua leitura, e unidades de medida e suas notações. As tabelas e gráficos apresentam os dados tabulados de 0 a 5 acertos.

Questão 6: Associe a cada desenho o seu significado:



(   )   (   )   (   )   (   )   (   )

a) diâmetro

b) raio

c) setor circular

d) círculo

e) circunferência

Tabela 23 – Elementos do círculo – Escolas A a E – 2005

Acertos na Questão 6	Número de alunos	% de alunos
0	37	24,7
1	19	12,7
2	11	7,3
3	30	20,0
4	1	0,7
5	52	34,7
Total	150	100,0

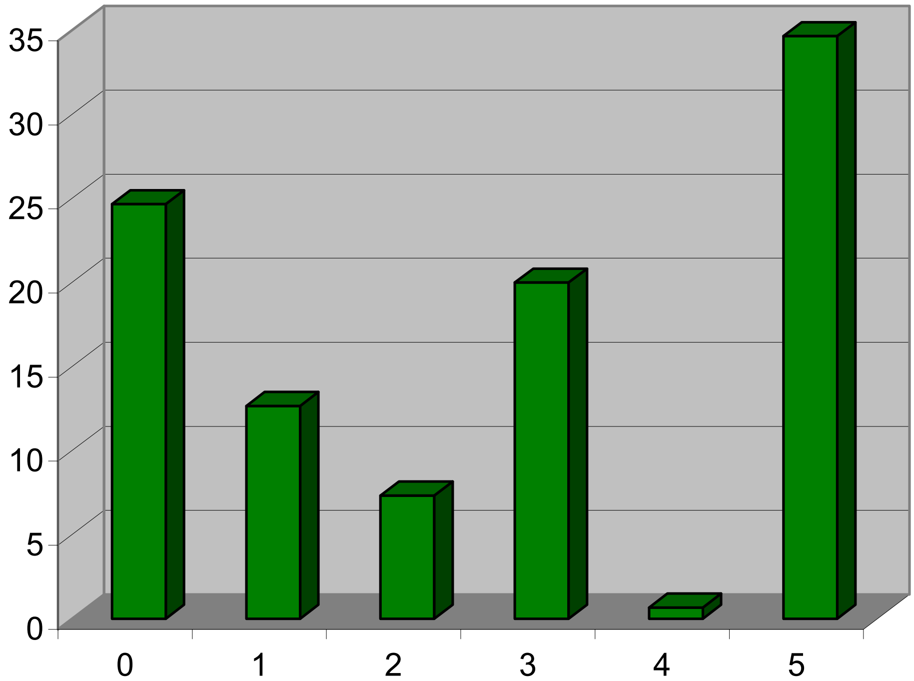
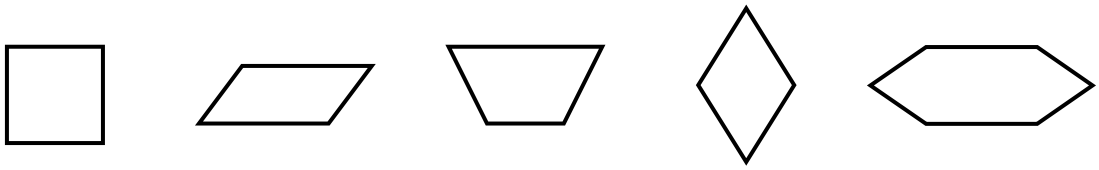


Gráfico 21 – Elementos do círculo – Escolas A a E – 2005

Na tabela 23 e no gráfico 21 é possível observar que 34,7% dos alunos fizeram as devidas associações e 24,7% não o fizeram. 20% dos alunos identificaram três elementos, trocando, em geral, círculo e circunferência. Conteúdos como geometria plana, espacial e trigonometria exploram conceitos ligados a estes desenhos. O aluno que não tiver este conhecimento, provavelmente, apresentará dificuldade em desenvolver estes conteúdos.

Questão 7: Associa a cada figura geométrica o seu nome:



( )   ( )   ( )   ( )   ( )

a) losango

b) quadrado

c) trapézio

d) hexágono

e) paralelogramo

Tabela 24 – Figuras planas – Escolas A a E – 2005

Acertos na Questão 7	Número de alunos	% de alunos
0	1	0,7
1	14	9,3
2	21	14,0
3	26	17,3
4	1	0,7
5	87	58,0
Total	150	100,0

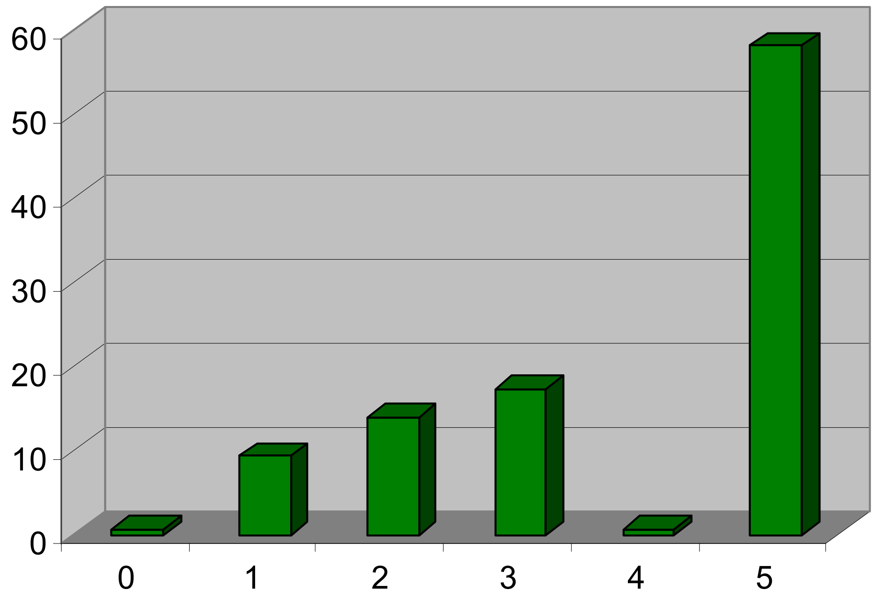


Gráfico 22 – Figuras geométricas – Escolas A a E – 2005

A tabela 24 e o gráfico 22 mostram que 58% dos alunos conhecem as figuras planas apresentadas e um aluno (0,7%) não conhece nenhuma das figuras.

Questão 8: Associe a cada expressão o seu significado:

a/b	**a + b**	**a – b**	**a. b**	$\mathbf{a^b}$
( )	( )	( )	( )	( )

a) a soma de a e b

b) a razão entre a e b

c) o produto de a por b

d) a diferença entre a e b

e) a elevado a b

Tabela 25 – Expressão algébrica – Escolas A a E – 2005

Acertos na Questão 8	Número de alunos	% de alunos
0	4	2,7
2	20	13,3
3	26	17,3
5	100	66,7
Total	150	100,0

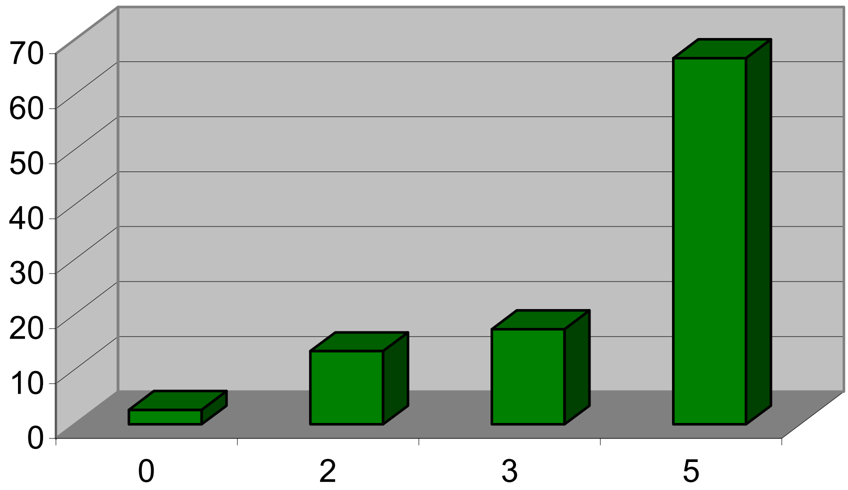


Gráfico 23 – Expressões algébricas – Escolas A a E – 2005

A tabela 25 e o gráfico 23 mostram que os alunos fizeram a passagem da linguagem matemática para a língua materna. Na resolução de problemas isso, em geral, faz diferença, pois se o aluno não fizer essa "tradução" ele não conseguirá resolvê-lo. Pode-se observar que 66,7% dos alunos fizeram essa tradução e 2,7% não o fizeram.

Questão 9: Associe a cada medida a sua unidade correspondente.

( ) km **( ) m^2** **( ) g** **( ) s** **( ) cm^3**

a) área

b) capacidade

c) tempo

d) comprimento

e) massa

Tabela 26 – Unidades de medida – Escolas A a E – 2005

Acertos na Questão 9	Número de alunos	% de alunos
0	7	4,7
1	9	6,0
2	13	8,7
3	35	23,3
4	3	2,0
5	83	55,3
Total	150	100,0

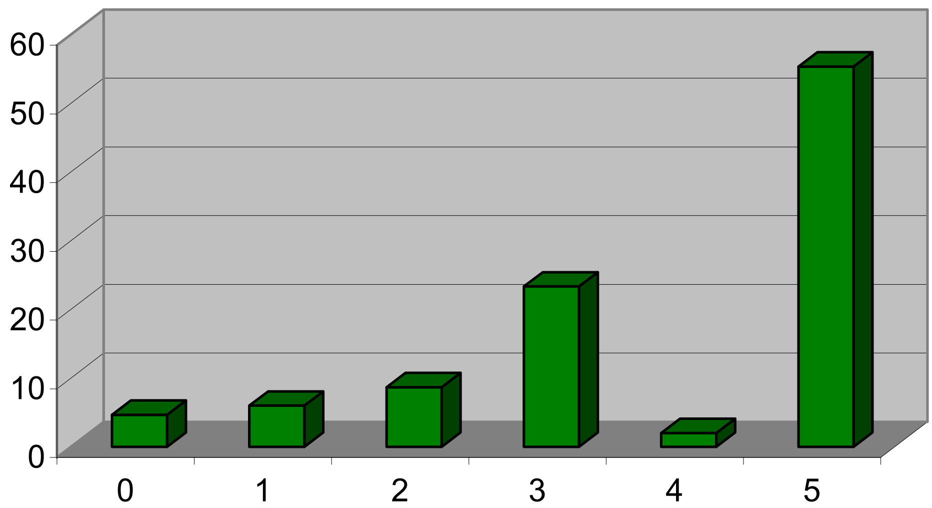


Gráfico 24 – Unidades de medida – Escolas A a E – 2005

Usar uma unidade de medida correta mostra o entendimento da grandeza que está sendo medida. No caso, 55,3% dos alunos associou a unidade de medida com sua respectiva grandeza. E 4,7% dos alunos não o fizeram. Ao resolver problemas que envolvem comprimento, área, volume, tempo e massa, entre outras grandezas, o aluno precisa dominar as unidades de medida e conhecer o uso de cada uma, além da relação existente entre elas.

Tabela 27 – Coeficientes de correlação entre as questões – Escolas A a E – 2005

Correlação	Q 1	Q 2	Q 3	Q 4	Q 5	Q 6	Q 7	Q 8	Q 9
Q 1	1,00								
Q 2	0,27	1,00							
Q 3	0,27	0,53	1,00						
Q 4	0,32	0,36	0,43	1,00					
Q 5	0,29	0,32	0,38	**0,71**	1,00				
Q 6	0,32	0,36	0,50	0,59	0,63	1,00			
Q 7	0,30	0,36	0,41	0,59	0,55	0,64	1,00		
Q 8	0,29	0,38	0,49	0,54	0,43	0,50	0,55	1,00	
Q 9	**0,11**	0,30	0,41	0,56	0,59	0,67	0,61	0,52	1,00

Q: indica a questão com o seu número correspondente.

A tabela 27 apresenta os coeficientes de correlação entre as questões de um até nove. A correlação estuda a associação entre duas variáveis. O coeficiente de correlação mede o grau de relação linear existente entre duas ou mais variáveis, ou seja, fornece uma idéia do relacionamento entre as variáveis. O coeficiente de correlação pode variar –1 a +1, sendo que quanto mais perto de 0 mais fraca é a relação e quanto mais próxima de –1 ou 1, mais forte.

Na tabela 27, é possível observar os coeficientes de correlação de cada questão com as demais. O valor mais baixo é 0,11, mostrando que a relação entre a Questão 1 e a Questão 9 é fraca, ou seja, a identificação pelo aluno do uso da Matemática no seu dia-a-dia não apresenta relação com o conhecimento das unidades de medida, e vice-versa. Nas tabelas 18 e 26, ou nos gráficos 16 e 24, é possível observar que 6,7% dos alunos identificam o uso da Matemática no dia-a-dia, ao passo que 55,3% conhecem as grandezas e suas unidades de medida correspondente, ou seja, verificar uma questão não implica verificar a outra. Já a relação mais forte, 0,71, está entre as questões 4 e 5. Se o aluno identifica várias formas de representar o número 0,2, ele identifica também diferentes formas de representar o teorema de Pitágoras e vice-versa. O coeficiente de correlação mostra que o aluno que não sabe a Questão 4, provavelmente, não saberá a Questão 5. Nas tabelas 21 e 22, ou gráficos 19 e 20, é possível observar e confirmar esta informação dada através do coeficiente de correlação. Na tabela 27, é possível observar a correlação existente entre as 9 questões. Aqui foi feita a análise de duas correlações, a mais forte e a mais fraca.

As questões 10 e 11 têm por objetivo observar se o aluno desenvolve cálculos com operações básicas apresentando um pensamento matemático bem estruturado, sem realizar generalizações. Cada questão tem cinco itens e foram tabulados em certo, errado ou não feito.

Questão10: Resolva as expressões:

a) $12 - 3.5 =$

b) $4 - (6 - 2) + 3.(2 - 7)^2 =$

c) $\frac{2}{5} + \left(\frac{4}{7}\right)^{-1} =$

d) $\frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{6}}{\frac{1}{2}} =$

e) $3\sqrt{12} + 2\sqrt{3} =$

Tabela 28 – Operações básicas – Escolas A a E – 2005

Questão 10 - % de alunos por escola				
Escola	C	e	nf	Total
A	74,67	19,33	6	100
B	70,67	24,67	4,67	100
C	45,33	35,33	19,3	100
D	21,33	20,67	58	100
E	8,667	32,67	58,7	100

c: certo, e: errado, nf: não fez

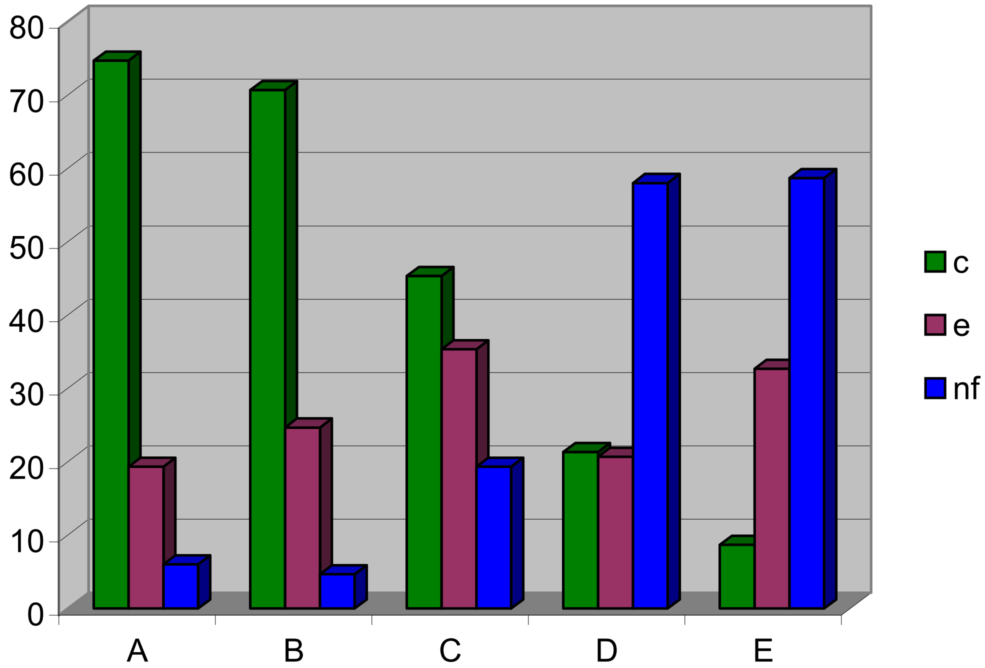


Gráfico 25 – Operações básicas – Escolas A a E – 2005

A questão 10 apresenta cinco itens, cada um envolvendo operações básicas, as quais são, em geral, desenvolvidas durante o Ensino Fundamental e utilizadas em diversos conteúdos do Ensino Médio. A tabela 28 e o gráfico 25 apresentam o desempenho dos alunos, por escola, nesta questão.

No item a), o tipo de erro cometido pelos alunos, em geral, foi a resolução das operações na ordem em que aparecem, realizando primeiro a subtração e depois a multiplicação. O aluno, em vez de fazer 12 – 3.5 = 12 – 15 = - 3, fez 12 – 3.5 = 9.5 = 45. Ocorreu também erro de sinal: 3 no lugar de – 3.

No item b), ocorreu erro de sinal e erro de generalização de propriedades, isto é, no lugar de fazer 4 – (6 – 2) + 3. $(2 – 7)^2$ = 4 – 4 +3.25 = 0 + 75 = 75, o aluno fez: 4 – (6 – 2) +3.$(2 – 7)^2$ = 4 – 4 + 3.(4 – 49) = 0 + 3.(-45) = - 135. Ou ainda, 3. $(2 – 7)^2 = 6^2 - 21^2$.

No item c), o erro mais freqüente foi passar o sinal negativo do expoente para a base. Então, em vez, de o aluno fazer $\frac{2}{5}+\left(\frac{4}{7}\right)^{-1}=\frac{2}{5}+\frac{7}{4}=\frac{8}{20}+\frac{35}{20}=\frac{43}{20}$, fez: $\frac{2}{5}-\frac{4}{7}=\frac{14}{35}-\frac{20}{35}=-\frac{6}{35}$. Ou ainda, $\frac{2}{5}+\frac{7}{4}=\frac{9}{9}=1$.

No item d), o tipo de erro mais comum, foi o de generalização de propriedades, pois, em vez de o aluno fazer $\frac{\frac{2}{3}.\frac{9}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{18}{18}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=1.\frac{2}{1}=2$ o aluno fez: MMC (menor múltiplo comum) para calcular $\frac{2}{3}.\frac{9}{6}=\frac{4}{6}+\frac{9}{6}=\frac{13}{6}$. Ou fez a divisão de forma incorreta $\frac{1}{\frac{1}{2}}=1.\frac{1}{2}=2$.

No item e), o erro também foi de generalização de propriedades. Em vez de fazer $3\sqrt{12}+2\sqrt{3}=3.2.\sqrt{3}+2\sqrt{3}=6\sqrt{3}+2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$, o aluno fez: $3\sqrt{12}+2\sqrt{3}=5\sqrt{15}$. Ou ainda, chega a uma parte do processo, mas erra no final: $6\sqrt{3}+2\sqrt{3}=8\sqrt{6}$.

Questão 11: Resolva as equações:

a) $2x - 6 = -12$

b) $-2x + 1 = x - 4$

c) $5 - 2.(x - 3) = 4$

d) $\frac{x+1}{3} - \frac{5x+2}{4} = 0$

e) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Tabela 29 – Resolução de equações – Escolas A a E – 2005

Questão 11 - % de alunos por escola				
Escola	c	e	nf	Total
A	63,3	26,0	10,7	100
B	59,3	26,0	14,7	100
C	48,0	32,0	20,0	100
D	17,3	17,3	65,3	100
E	12,7	28,0	59,3	100

c: certo, e: errado e nf: não fez.

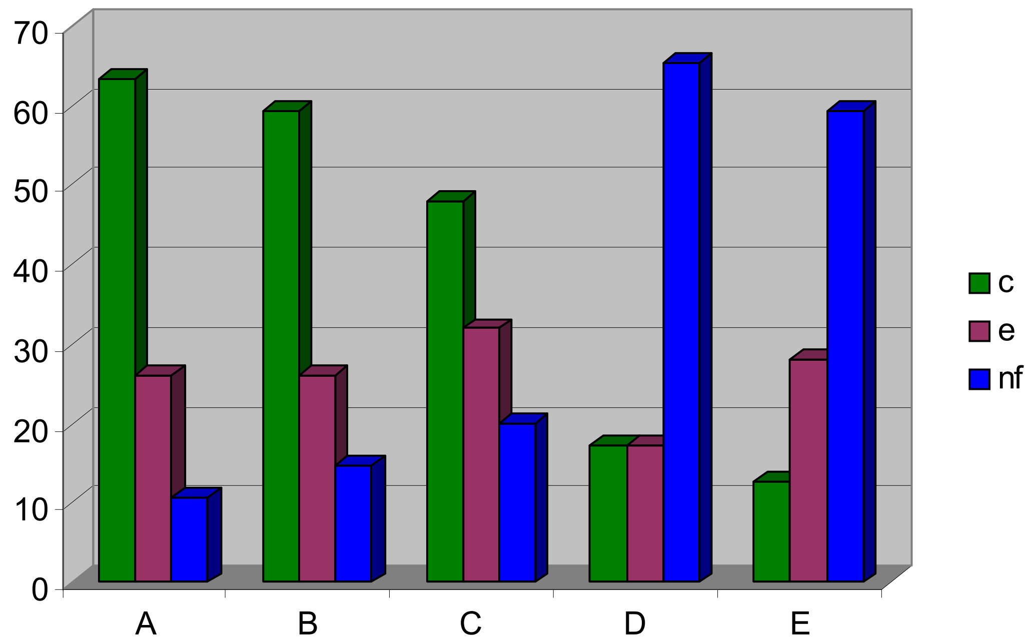


Gráfico 26 – Resolução de equações – Escolas A a E – 2005

A Questão 11 apresenta cinco itens envolvendo equações do 1º e 2º graus que, geralmente, são desenvolvidas no Ensino Fundamental e necessárias em vários conteúdos do Ensino Médio. Para o aluno resolver as equações apresentadas nesta questão, ele precisa ter conhecimento das operações apresentadas na Questão 10. Na tabela 29 e no gráfico 26, é possível visualizar, por escola, o desempenho dos alunos, ou seja, as escolas A, B e C apresentam um desempenho melhor em relação às escolas D e E, já que a maioria dos alunos das escolas D e E não resolveram a questões.. Comparando os gráficos 25 e 26, é possível observar que o desempenho das escolas nas questões 10 e 11 é semelhante, alunos que têm dificuldades na resolução de operações e aplicação das suas propriedades tem também dificuldade em resolver equações, nas quais aparecem as mesmas operações e propriedades.

O aluno que não resolve corretamente operações como as da Questão 10, também não resolve equações, já que estas necessitam de conhecimento das operações e suas precedências para serem resolvidas.

Questão 12: A expressão algébrica que traduz “x% de y é z” é

a) $\frac{xyz}{100} = 1$

b) $\frac{x}{100y} = z$

c) x. 100y = z

d) $\frac{x}{100} y = z$

e) $\frac{xyz}{100} = 0$

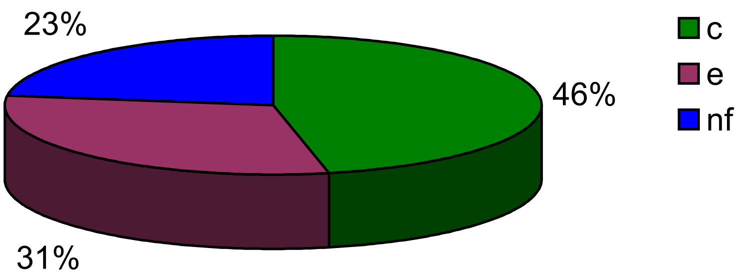
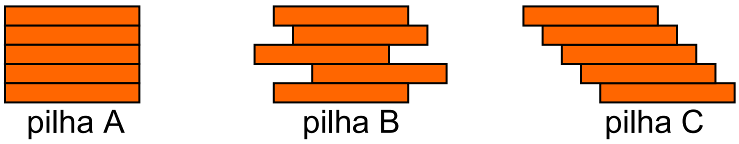


Gráfico 27 – Transformação de linguagem – Escolas A a E – 2005

A Questão 12 trata de linguagem, pois, se o aluno tem o domínio da língua materna e da linguagem matemática, ele faz a transformação de uma na outra. Porém, se ele não dominar uma delas, surge então um empecilho para a resolução de um problema. Como é possível verificar pelo gráfico 27, 46% dos alunos fez essa tradução corretamente.



Questão 13: (UFSM-RS) Três crianças estavam brincando na biblioteca da escola e resolveram fazer pilhas de mesma altura, com livros, conforme a figura. A mais organizada fez a pilha A, e as outras duas fizeram as pilhas B e C. Considerando-se que todos os livros têm a mesma área de capa e que as pilhas têm a mesma altura, pode-se afirmar que:

a) O volume da pilha A é maior do que o volume da pilha C.

b) Os volumes das pilhas B e C são iguais e maiores do que o volume da pilha A.

c) O volume da pilha A é menor do que o volume da pilha B que é menor do que o volume da pilha C.

d) Os volumes das três pilhas são iguais.

e) Não existem dados suficientes no problema para decidir sobre os volumes e compará-los.

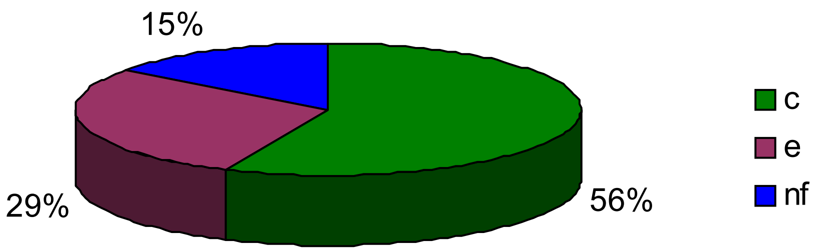
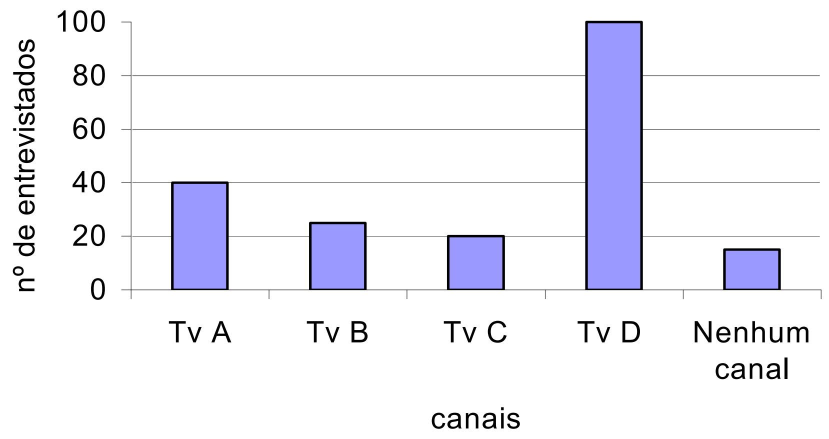


Gráfico 28 – Interpretação – Escolas A a E – 2005

As respostas da Questão 13, representadas no gráfico 28, revelam mais um problema de interpretação do que de Matemática, pois se ele não entender o que está sendo perguntado ele não consegue resolver. Interpretando o problema ele verá que precisa de conhecimento sobre volume para resolver a questão matemática do problema. Neste caso, 56% dos alunos interpretaram e resolveram o problema.

(ENEM-1998) Uma pesquisa de opinião foi realizada para avaliar os níveis de audiência de alguns canais de televisão, entre 20h e 21h, durante uma determinada noite. Os resultados obtidos estão representados no gráfico de colunas abaixo:



Questão 14: A percentagem de entrevistados que declararam estar assistindo à Tv B é aproximadamente igual a:

a) 13%

b) 20%

c) 22%

d) 27%

e) 30%

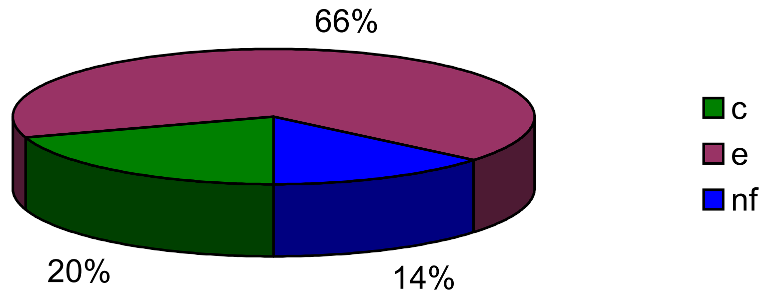


Gráfico 29 – Leitura de percentuais – Escolas A a E – 2005

A Questão 14 envolve leitura e interpretação de um gráfico. O gráfico 29 mostra que a maioria dos alunos não apresenta esta habilidade. Como se pode ver no gráfico 29, 20% dos alunos leu e interpretou a questão solicitada. Os alunos que erraram a questão não levaram em conta que ela pedia o percentual de entrevistados que assistiam a Tv B, indicando apenas o total de entrevistados.

Questão 15: O número de residências atingidas nessa pesquisa foi aproximadamente de:

a) 100

b) 135

c) 150

d) 200

e) 220

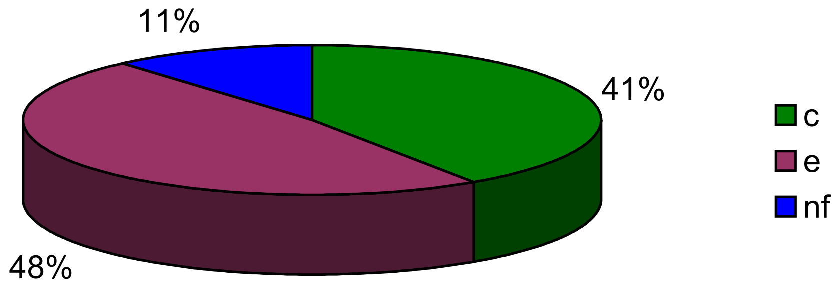


Gráfico 30 – Leitura de gráficos – Escolas A a E – 2005

A Questão 15 faz referência ao mesmo gráfico da Questão 14, e é dependente de leitura e interpretação. O desempenho correto dos alunos foi de 41%. Neste caso, não era preciso calcular percentuais, apenas fazer uma contagem direta.

Questão 16: Escreva as frases na linguagem Matemática:

a) um número ____

b) o dobro de um número menos sete _______________________________

c) o triplo de um número mais o seu quadrado _________________________

d) a diferença entre um número e seu cubo ___________________________

e) cinco terços de um número mais o dobro deste número ________________

Tabela 30 – Transformação de linguagem – Escolas A a E – 2005

Questão 16 – percentuais dos alunos por escola				
Escola	C	e	nf	Total
A	57,3	41,3	1,3	100
B	60,0	26,7	13,3	100
C	52,7	41,3	6,0	100
D	17,3	31,3	51,3	100
E	8,0	34,7	57,3	100

c: certo, e: errado, nf: não fez

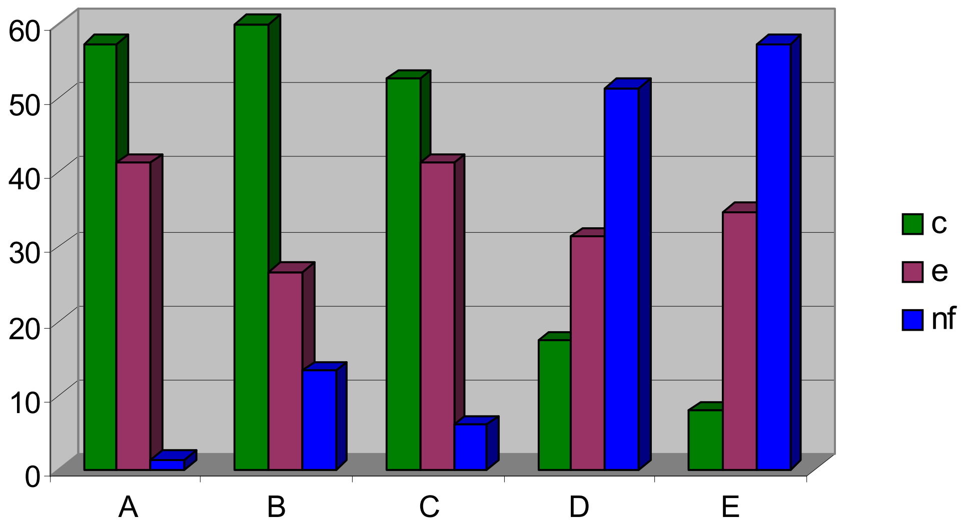


Gráfico 31 – Transformação de linguagem – Escolas A a E – 2005

A questão 16 apresenta cinco itens escritos na língua materna para serem transformados na linguagem matemática. Na tabela 30 e no gráfico 31, é possível observar o desempenho dos alunos das cinco escolas.

Questão 17: Um menino possui 3 carrinhos com 4 rodas em cada um. Qual a idade do menino?____

Esta questão tem por objetivo observar se o aluno percebe a ausência de conexão entre as informações fornecidas e a questão proposta. Pais (2001) afirma, a respeito deste problema, que:

> A falta de coerência entre os dados do problema não é percebida por um grande número de alunos, que insistem em apresentar uma solução numérica, relacionando os números que aparecem no enunciado, pois esta é, quase sempre, uma regra implícita na resolução de problemas de aritmética (p. 81).

Essa observação de Pais se confirmou. Como ocorre na resolução de muitos problemas de matemática, o aluno simplesmente opera com os números apresentados no problema. Nas cinco escolas, vários alunos responderam que a idade do menino era 7 (3 + 4) ou 12 (3 X 4). É possível perceber que eles simplesmente operaram os dados do problema (3 carrinhos e 4 rodas) e chegaram a um resultado. Em geral, os problemas que são solicitados para que os alunos resolvam têm um resultado que pode ser obtido quase que diretamente com os números que aparecem no problema.

Outros faziam conjecturas sobre a questão, do tipo: “Os dados não são suficientes, porém o menino deve ter a idade suficiente para brincar de carrinho”. Ou ainda: “Qualquer uma. Tanto pode ser uma criança como um colecionador de miniaturas”. Um aluno, sentindo a “obrigatoriedade” de apresentar uma resposta, escreveu que: “Não é possível fazer, porém creio que seja 12 ou idade infantil”. Nesta última declaração, é possível observar que, mesmo o aluno percebendo que não é possível fazer, ele dá uma resposta. Será que, para ele, todo problema sempre tem uma resposta?

Alguns alunos perceberam a falta de coerência entre os dados do problema, respondendo que: “Com os dados do problema, não é possível calcular a idade do menino”. Ou: “É impossível responder, pois faltam dados para sua resolução”. Ou ainda: “Não existem dados suficientes para responder”. Apareceu também um grupo de alunos que colocaram: “Não sei”.

Esta questão se apresenta, conforme Pais (2001, p.81), como “um problema para o qual a estratégia de solução não está compatível com o nível intelectual e cognitivo do aluno”. Sendo os alunos, em geral, “treinados” para resolver problemas operando os números que nele aparecem, neste caso, mesmo os dados não tendo uma relação lógica entre si, os alunos se comportam da maneira para a qual foram “treinados”.

Questão 18: Eu e você temos juntos 6 reais. Quanto dinheiro eu tenho? _________

____

O objetivo desta questão é verificar se o aluno está atento, se ele é fiel aos dados que o problema apresenta. A tendência dos alunos foi dividir em duas partes iguais afirmando que cada um tem 3 reais. Entretanto, alguns alunos perceberam que o problema poderia ter mais de uma solução, o que geralmente não acontece, já que grande parte dos problemas matemáticos tem uma única solução, ou não são analisadas nem discutidas as possibilidades de soluções distintas.

Como na questão 17, os alunos fizeram afirmações e conjecturas tais como: “Se tiver a metade, 3 reais”, ou “Depende de quanto a outra pessoa tem. Se eu tiver 1, você terá 5, se eu tiver 4, você terá 2, ...”, ou “Posso ter de 1 centavo até 5,99 reais”, ou ”Os dados fornecidos não são suficientes para se saber o valor exato, apenas pode-se dizer que tenho entre 0 e 6 reais”. Estas afirmações mostram diferentes formas de interpretação do problema feitas pelos alunos e que é possível ter respostas diferentes num mesmo problema. Alguns alunos apresentaram somente uma resposta numérica, assim como 3 ou 6 ou 4, sem uma análise da situação, simplesmente um número, o que geralmente é esperado de um problema matemático. Apareceram ainda alunos que responderam que os dados não eram suficientes, ou que faltavam dados. Outros não responderam.

Questão 19: Numa sala tem 5 pessoas e todas elas se cumprimentam com um aperto de mão. Quantos apertos de mão serão dados? ____

Tabela 31 – Resolução de problema – Escolas A a E – 2005

Questão 19	número de alunos	% de alunos
c	60	40
e	74	49,3
nf	16	10,7
Total	150	100

c: certo, e: errado, nf: não fez

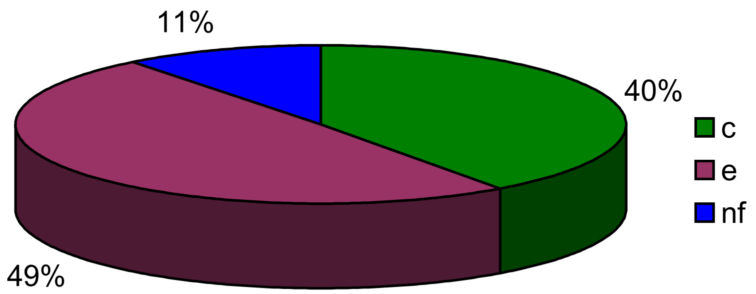


Gráfico 32 – Problema – Escolas A a E – 2005

Esse problema apresenta uma situação do cotidiano mas, em geral, não se leva em conta a questão da contagem. A pessoas se cumprimentam sem, necessariamente contar a quantidade de apertos de mãos que são dados. O problema acaba tendo a mesma característica da questão 17, ou seja, os dados são simplesmente operados. Alunos que erraram a questão faziam 5 x 5 = 25 apertos de mãos, ou 5 x 4 = 20. Levaram em consideração apenas os números, sem analisar em que consiste um aperto de mãos. Observando a tabela 31 e o gráfico 32 é possível observar que 40% dos alunos resolveram o problema de forma correta.

Questão 20: A tabela abaixo apresenta o preço de um xampu com diferentes quantidades. Qual xampu é mais vantajoso de ser comprado?

XAMPU	PREÇO (em reais)
200 ml	3,10
300 ml	4,20
500 ml	5,30

____

____

____

Tabela 32 – Preço vantajoso – Escolas A a E – 2005

Questão 20	número de alunos	% de alunos
c	107	71,3
e	19	12,7
nf	24	16,0
Total	150	100,0

c: certo, e: errado, nf: não fez

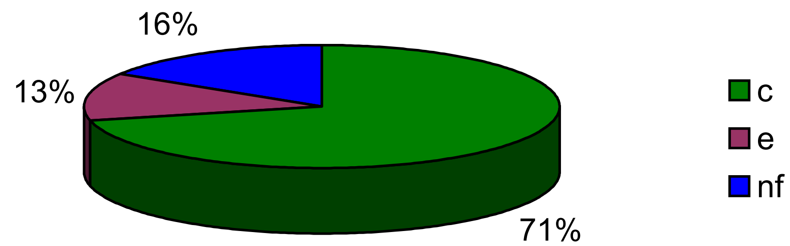


Gráfico 33 – Preço vantajoso – Escolas A a E – 2005

O objetivo da questão 20 foi observar como o aluno responde a uma questão contextualizada, se propor um problema que por ele é vivenciado auxilia no entendimento e na resolução do mesmo.

Da tabela 32 e do gráfico 33, é possível observar que 71% dos alunos resolveram corretamente o problema.

9.2 Cruzamento das categorias

São três as categorias a serem cruzadas: 1. variáveis biométricas, 2. relação aluno – matemática e 3. linguagem, simbologia e interpretação. Cada categoria apresenta uma grande quantidade de dados, tornando a combinação de todos entre si inviável, portanto foram escolhidos alguns cruzamentos para análise. Sendo que nesta escolha está presente a combinação das três categorias entre si. Esses cruzamentos permitem a visualização da relação existente entre variáveis de diferentes categorias e da forma com que uma tem influência sobre a outra.

Foi tomado como critério para análise dos cruzamentos a observação dos extremos, ou seja, 0 ou 5, que representam, respectivamente, “discordo totalmente” e “concordo totalmente”.

1º cruzamento: Escolaridade dos pais com Gostar de estudar.

Tabela 33 – Escolaridade do pai com Gostar de estudar – Escolas A a E – 2005

	Gosta de estudar							
Escolaridade do pai	0	1	2	3	4	5	Nr	Total
1G	2,7	2,0	2,0	6,7	3,3	11,3	0,7	28,7
2G			4,7	8,7	2,7	3,3		19,3
3G	2,7	4,0	5,3	12,7	2,7	0,7		28,0
D	0,7							0,7
E	0,7	0,7	2,0					3,3
M				0,7		0,7		1,3
NR	1,3		3,3	3,3	3,3	6,7	0,7	18,7
Total	8,0	6,7	17,3	32,0	12,0	22,7	1,3	100,0

1G: primeiro grau, 2G: segundo grau, 3G: terceiro grau, D: doutorado, E: especialização, M: mestrado, NR: não responderam.

Tabela 34 – Escolaridade da mãe com gostar de estudar – Escolas A a E – 2005

	Gosta de estudar							
Escolaridade da mãe	0	1	2	3	4	5	nr	Total
1G	2,7	1,3	1,3	5,3	4,0	12,7	0,7	28,0
2G		1,3	4,7	12,0	4,7	0,7		23,3
3G	4,0	3,3	7,3	11,3	0,7	4,7		31,3
E		0,7	0,7	1,3	0,0	0,0		2,7
M					0,7	0,7		1,3
NR	1,3		3,3	2,0	2,0	4,0	0,7	13,3
Total	8,0	6,7	17,3	32,0	12,0	22,7	1,3	100,0

1G: primeiro grau, 2G: segundo grau, 3G: terceiro grau, D: doutorado, E: especialização, M: mestrado, NR: não responderam.

Nas tabelas 33 e 34, é possível observar que os alunos que afirmam gostar de estudar são aqueles cujos pais têm a menor escolaridade. O objetivo deste cruzamento era verificar se a escolaridade dos pais influencia no gosto pelos estudos dos filhos. Será que pais com mais escolaridade têm filhos com mais apreço pelos estudos? Nas tabelas também se percebe que, em geral, o gosto do aluno pelo estudo é mediano, está em maior parte concentrado no valor 3 em todos os níveis de escolaridade tanto do pai quanto da mãe.

2° cruzamento: Matéria preferida com Gostar de estudar

Tabela 35 – Matéria preferida e gostar de estudar – Escolas A a E – 2005

	Gosta de estudar							
Matéria preferida	0	1	2	3	4	5	nr	Total
Artes				0,7	0,7	2,0		3,3
Biologia	2,0	0,7	2,0	4,7	2,0	4,7		16,0
Educação física	1,3		0,7	2,0				4,0
Física			2,0	2,7	0,7			5,3
Geografia		1,3		2,0	1,3			4,7
História	1,3	1,3	3,3	6,7	1,3	2,0		16,0
Informática						2,7		2,7
Inglês		0,7		0,7	0,7	0,7		2,7
Literatura			2,0		1,3	0,0		3,3
Matemática	0,7	2,7	4,0	6,0	2,0	7,3		22,7
Português	0,7		0,7	1,3	0,0	1,3		4,0
Química	0,7			0,7	0,7	0,7		2,7
Sociologia	0,7		0,7					1,3
não respondeu	0,7		2,0	4,7	1,3	1,3	1,3	11,3
Total	8,0	6,7	17,3	32,0	12,0	22,7	1,3	100,0

Na tabela 35, é possível observar que a matéria preferida é a Matemática. Porém, os 22,7% dos alunos que escolheram esta disciplina como preferida, 32,2%

$\left(\frac{7,3}{22,7}\right)$gosta de estudar. É popular o discurso de que Matemática é para quem gosta de estudar muito; entretanto, neste cruzamento, percebe-se que 3% dos alunos não gostam de estudar, mas têm a Matemática como matéria preferida. Talvez caiba analisar o que significa estudar para os alunos e para os professores, e também o que leva uma disciplina a ser a preferida.

<u>3º cruzamento:</u> Disciplina agradável com Matemática é difícil

Tabela 36 – Matemática agradável ou difícil? – Escolas de A a E – 2005

	É difícil							
Disciplina agradável	0	1	2	3	4	5	nr	Total
0	1,3	0,7	0,7		0,7	6,7	0,7	10,7
1		0,7	2,0	3,3	2,0	3,3		11,3
2	0,7	1,3	1,3	4,7	2,0	8,0	1,3	19,3
3		2,7	3,3	8,0	6,7	4,0		24,7
4	2,0	3,3		3,3	2,0	5,3		16,0
5	3,3	2,0	2,7	3,3	0,7	4,7		16,7
Nr						0,7	0,7	1,3
Total	7,3	10,7	10,0	22,7	14,0	32,7	2,7	100,0

A tabela 36 mostra o cruzamento de duas afirmações: “a Matemática é uma disciplina agradável” e “a Matemática é difícil”. É possível observar, na tabela, que 32,7% dos alunos acham a Matemática difícil, porém, desses, 28% acham a disciplina agradável e, dos 7,3% que não acham a disciplina difícil, 20% a acham agradável. Os cruzamentos desses dados permitem visualizar quanto os alunos são heterogêneos em uma turma ou em uma escola. Não é por ser considerada difícil que uma disciplina tenha que ser ou não agradável e vice-versa. Talvez os fatores que tornem a Matemática difícil ou agradável estejam ligados não à disciplina, mas a sua forma de ser desenvolvida.

4º cruzamento: Conhecer símbolos na teoria e na prática

Tabela 37 – Conhecimento e símbolos – Escolas A a E – 2005

	Questão 3 - Identificação de símbolos						
Símbolos	0	1	2	3	4	5	Total
0		0,3	0,3	5,1	11,1	29,3	46,1
1				0,5	2,5	13,1	16,0
2		0,2		1,9	3,1	16,2	21,3
3		0,2	0,3	0,9	1,9	4,6	7,9
4				0,5	0,6	2,3	3,4
5				0,5	1,9	2,3	4,6
Nr					0,6		0,6
Total		0,6	0,6	9,3	21,6	67,9	100,0

A tabela 37 relaciona a afirmação de que conhecer um símbolo é suficiente para se saber Matemática com a Questão 3, que solicita a identificação de cinco símbolos utilizados em Matemática entre dez. 46% dos alunos avaliaram que conhecer os símbolos não é suficiente para se saber Matemática, e, desses, 43% identificaram os 5 símbolos corretamente. Todos os alunos identificaram pelo menos um símbolo.

<u>5º cruzamento:</u> Matemática ser difícil e identificação do teorema de Pitágoras

Tabela 38 – Dificuldade e o Teorema de Pitágoras – Escolas de A a E – 2005

	Questão 5 - Teorema de Pitágoras						
É difícil	0	1	2	3	4	5	Total
0	0,7	2,0	1,3	3,3			7,3
1		1,3	0,7	4,0	1,3	3,3	10,7
2	2,7	2,7		4,7			10,0
3	4,7	6,0	1,3	8,0	2,7		22,7
4	5,3	2,0	2,0	3,3	0,7	0,7	14,0
5	16,7	8,7	2,0	5,3			32,7
nr	1,3	1,3					2,7
Total	31,3	24,0	7,3	28,7	4,7	4,0	100,0

Na tabela 38, é possível perceber que, de 32,7% dos alunos que consideram a Matemática difícil, 53% não conseguiu identificar o teorema de Pitágoras em nenhuma das situações apresentadas. Em contrapartida, dos 7,3% dos alunos que não consideram a Matemática difícil, 2% também não conseguiram identificar o teorema. Portanto, o fato de os alunos terem dificuldades de identificar o teorema de Pitágoras não está ligado ao fato de eles considerarem a disciplina difícil ou não.

<u>6º cruzamento:</u> Linguagem e representação do 0,2

Tabela 39 – Linguagem – Escolas A a E – 2005

	Questão 4 - Representação do 0,2						
Linguagem	0	1	2	3	4	5	Total
0	2,0	1,3					3,3
1	0,7	0,7					1,3
2	1,3	2,0	0,0	0,7	0,7		4,7
3	1,3	4,0	1,3	0,0	2,0	4,0	12,7
4	4,7	1,3	0,7	1,3	4,0	3,3	15,3
5	10,7	16,7	4,0	10,0	12,0	8,0	61,3
nr	0,7	0,7					1,3
Total	21,3	26,7	6,0	12,0	18,7	15,3	100,0

A tabela 39 faz o cruzamento da linguagem matemática com a Questão 4, na qual o aluno deve identificar 5 representações diferentes do 0,2 entre dez alternativas. É possível observar, na tabela, que 61% dos alunos consideram que compreender a linguagem matemática auxilia no entendimento da Matemática, e 15% dos alunos conseguem ler o número 0,2 de outras cinco maneiras. Isso reforça, então a idéia de que é preciso conhecer a linguagem matemática, pois a resolução de um problema geralmente depende desse conhecimento. Os alunos têm consciência disso, pois, de 21% que não identificaram o número 0,2 de outra forma, 50% sabem da necessidade de se conhecer a linguagem. O que leva o aluno a não identificar o número 0,2 de outras maneiras? Quais suas noções a respeito de números decimais e suas representações? Eis algumas questões para pensarmos.

<u>7º cruzamento:</u> Matemática desperta o interesse e Matemática é útil no dia-a-dia

Tabela 40 – Matemática no dia-a-dia – Escolas A a E – 2005

	Útil no dia-a-dia							
Desperta o interesse	0	1	2	3	4	5	nr	Total
0		1,3	0,7	0,7	1,3	3,3	0,7	8,0
1		0,7	0,7	1,3	2,7	4,0		9,3
2			1,3	5,3	4,7	7,3		18,7
3			0,7	1,3	6,7	11,3		20,0
4				2,0	4,7	16,0		22,7
5	0,7		0,7	1,3		15,3	1,3	19,3
nr						0,7	1,3	2,0
Total	0,7	2,0	4,0	12,0	20,0	58,0	3,3	100,0

Na tabela 40, é possível observar que 58% dos alunos concordam que a Matemática é útil no dia-a-dia, e a Matemática desperta o interesse de 26% desses.

De uma forma geral, os alunos percebem a utilidade da Matemática dentro e fora da escola, e a disciplina desperta o interesse. Parece que existe uma contradição em relação ao que acontece na escola e os sentimentos dos alunos em relação à Matemática.

10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Traçar considerações a respeito do pensamento matemático, da linguagem matemática, das teorias cognitivistas, da aprendizagem significativa e da análise de erros auxiliou na análise dos dados. Essa análise tenta compreender as causas que levam o aluno a ter determinada relação com a Matemática, e de que forma as suas vivências e percepções influem nesta relação, além de analisar os tipos de erros mais freqüentes entre os respondentes, para aquelas questões. Não é possível ser simplista a ponto de pensar que um aluno não sabe ou não entende Matemática pelo fato de não estudar. Este pode ser um fator, mas existem outros. Será que esse não saber ou não entender está no desenvolvimento do pensamento matemático? No entendimento da linguagem matemática? Ou em por que a aprendizagem não está sendo significativa? Os erros que geralmente os alunos cometem se repetem nas mais diversas escolas. Como tratar esse erro esperado? Questões como essas são mundiais. Professores tentando descobrir como se ensina e se aprende Matemática de forma significativa, na qual o aluno não seja um mero repetidor de modelos.

O aluno em diversas situações não compreende os conceitos trabalhados nas aulas de matemática e resolve as questões através de regras e propriedades, as quais utiliza de forma generalizada. Essa generalização é fruto de um ensino mecânico, sem sentido e descontextualizado. Em algumas questões do instrumento de pesquisa o resultado conduz a esta análise, como, na Questão 10, no caso em que o aluno resolve $3\sqrt{12}+2\sqrt{3}$ e encontra $5\sqrt{15}$ é possível perceber que ele não tem noção de o que representa o número $\sqrt{12}$, ele não vê diferença entre 12 e $\sqrt{12}$, ou seja, para ele os radicais não têm significado, ele não percebe a quantidade que este número representa. E, em geral, na 8ª série do Ensino Fundamental são estudadas operações, propriedades e simplificações com radicais. E quando são usados esses conceitos no Ensino Médio, em trigonometria, por exemplo, é preciso retomá-lo. Os alunos fazem racionalizações afirmando que é preciso, pois lhes foi explicado que não existe raiz no denominador, este é o significado atribuído à racionalização.

Portanto, talvez muitos dos erros que os alunos cometem devem-se aos conceitos sem significado, descontextualizados. São dadas regras para somar, multiplicar, dividir e muitos exercícios para "fixar a aprendizagem". Porém, isso não está tendo o efeito desejado, pois independentemente da escola, os erros se repetem e é possível prever exatamente onde o aluno vai cometer o erro e qual será ele.

Na análise das questões mais específicas de conteúdos de Matemática nas quais o aluno, geralmente, utiliza regras, modelos prontos para resolver ou representar, foi possível observar um maior índice de erros. Isto pode ser observado na correlação das questões 4 e 5. O coeficiente de correlação entre a representação do número 0,2 (Questão 4) e a identificação do teorema de Pitágoras (Questão 5) em diferentes triângulos retângulos é forte: 0,71; isso sugere que o aluno não resolve uma questão por não conhecer "sinônimos" na linguagem matemática; ele aprende uma forma de representação e pensa que ela é única. Neste caso, aparece, novamente, a questão da generalização, no qual um número não pode ser escrito de diferentes maneiras, assim como o teorema de Pitágoras tem uma única representação e notação para os seus elementos. Percebe-se, assim, que se deve trabalhar com os alunos maneiras diferentes de representar um número e perceber o teorema de Pitágoras em qualquer triângulo retângulo, independentemente da sua posição ou das letras utilizadas para a representação de seus lados. Discussões desse tipo abrem um leque de possibilidades que qualifica o pensamento matemático.

É possível concluir que a aprendizagem não está sendo significativa. Ela está sendo automática, fortalecendo a memorização de conceitos e aplicação de algoritmos e fórmulas. Não é feita análise de resultados ou discussões sobre o que se está aprendendo. Essa forma de aprendizagem é também responsável pelos erros cometidos pelos alunos.

Várias teorias discutem e sugerem meios para se obter uma aprendizagem significativa. Piaget ressalta em seus estudos a necessidade da ação do sujeito, da construção interna, de atividades práticas e que o aluno crie mecanismos para relacionar as informações contidas na aprendizagem, além da maturidade que é diferente em cada um. Vigotski apresenta estratégias de ensino divididas em quatro categorias: mediação, processo de internalização, zona de desenvolvimento proximal e formação de conceitos, além de dar ênfase à contextualização. Vergnaud apresenta os campos conceituais mostrando que um conceito não se forma dentro de um só tipo de situação, que uma situação não se analisa com um só conceito e que a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo bastante longo. Ausubel defende a aprendizagem significativa que se dá quando uma nova informação se relaciona com algo que é relevante para a estrutura do conhecimento do indivíduo, ressaltando a intenção do aluno em querer aprender.

Nas quatro teorias é possível perceber que mudam os pressupostos teóricos, mas existem necessidades em comum, ou seja, que o aluno tenha condições de agir sobre o aprender, que tenha atividades práticas (contextualize), que relacione informações (aprendizagem significativa), que perceba que um conceito não tem fim em si mesmo e que para a construção do conhecimento é preciso tempo e maturidade. O professor é elemento essencial nesse processo. Quando esse processo não se desencadear de forma adequada o aluno não estará aprendendo de forma significativa.

A Questão 10 solicita que o aluno resolva operações básicas, em que é preciso observar a precedência e utilizar algumas propriedades. Nessas operações, é possível observar que os alunos que estão concluindo o Ensino Médio ainda têm dúvidas sobre operações básicas e generalizam propriedades. Estes mesmos alunos, num breve espaço de tempo, estarão freqüentando as universidades em cursos que precisarão desses conceitos para que possam avançar na sua profissão. Portanto, um ensino de Matemática sem significado, feito sob modelos prontos, precisa ser repensado.

Acontece de os alunos não resolverem um problema por não entenderem o que está sendo pedido, e não por não saberem Matemática. A linguagem falada e escrita precisa ser clara, é necessário que aconteça a comunicação entre o aluno e o professor.

As questões ligadas à relação do aluno com a Matemática ou o seu conhecimento da linguagem matemática por meio de diversos símbolos, não parecem ser problema para o aluno. Ele tem consciência da importância da Matemática no dia-a-dia e na escola, mas não consegue aplicar essa linguagem na resolução dos problemas, já que faz generalizações de regras sem sentido. Um fator, entretanto, que chama a atenção é o fato da Matemática que, em geral, é vista como uma disciplina difícil, responsável por reprovações, aparecer como matéria preferida nas cinco escolas que participaram da pesquisa. Em minha prática pedagógica observo que quando o aluno entende o que está aprendendo em Matemática, ele gosta do assunto e se sente motivado a conhecer e estudar mais.

No capítulo nove, foi feita uma análise dos dados apresentados no questionário respondido pelos alunos. Esse questionário foi elaborado com o objetivo de tentar compreender o que acontece com os alunos no Ensino Médio, pois é preciso constantemente revisar conceitos trabalhados no Ensino Fundamental que são aplicados em conteúdos dessa etapa.

O problema está na forma de ensinar? Na formação dos professores de Matemática? Na estrutura da disciplina? No pensamento? Na linguagem? Na simbologia? Na comunicação?

A idéia inicial da pesquisa era elaborar o instrumento de pesquisa, mas como naquele momento não estava totalmente claro e definido o problema a ser pesquisado, iniciei pelo estudo de teóricos e teorias que tivessem ligação com as idéias que pretendia desenvolver. À medida que ia estudando e aprendendo mais sobre ensino, aprendizagem, linguagem, comunicação, pensamento, entre outros aspectos, o instrumento de pesquisa ficava mais claro e definido. Nesse processo, houve várias tentativas sobre o formato de cada item que constitui este instrumento.

O instrumento ficou estruturado sobre três categorias que foram analisadas separadamente no capítulo nove. Essas categorias abordaram três pontos que são ao mesmo tempo distintos e compatíveis. Distintos, pois podem ser analisados separadamente, mostrando elementos pertinentes ao aluno dentro e fora do seu cotidiano escolar. Compatíveis, pois, cruzando os dados de diferentes categorias, é possível tirar conclusões sobre alguns dos questionamentos levantados para o desenvolvimento desta pesquisa.

O processo de desenvolvimento deste trabalho teve avanços e retrocessos. Durante todo o período de sua realização e desenvolvimento deste estive em salas de aula, e pude observar o trabalho dos alunos e verificar a ligação entre a teoria e a prática. Considero avanço tudo o que este estudo proporcionou para melhorar minha prática em sala de aula. Considero retrocesso os momentos em que, na minha prática, utilizei métodos contraditórios em relação à teoria que desenvolvia neste trabalho.

O ponto de partida deste trabalho foi tentar buscar respostas a questionamentos referentes ao ensino da Matemática nas escolas, em geral. Essa busca deveria ser feita entre corpo docente e/ou discente. Avaliei que os alunos poderiam mostrar, na sua prática escolar, como percebem a Matemática que lhes é ensinada e que tipo de reflexão é feita a respeito dela. Num segundo momento, visei organizar os objetivos de forma coerente com o que buscava. Em seguida, procurei realizar um estudo para fundamentar teoricamente essa busca, e finalmente tratei de elaborar o instrumento de pesquisa, de forma que ele atendesse aos objetivos. Nesse processo, foi aberto um leque de possibilidades: questionamentos pertinentes ao tema, mas que de fato poderiam ser utilizados na elaboração de outra dissertação. Foi preciso manter o foco da pesquisa e estar atento aos objetivos.

Este trabalho já proporcionou mudanças na minha prática pedagógica. Hoje tenho um maior cuidado na linguagem utilizada na sala de aula e nas atividades com os alunos. Trabalho com eles o significado das palavras nas questões, sempre que possível fazendo associações, já que esta pesquisa mostrou que, em diversas situações, o aluno não resolve um problema por não saber o que o enunciado está solicitando. Fortaleço a idéia de que, como a Matemática tem uma linguagem própria, o aluno deve expressar o pensamento através dessa linguagem.

Existem situações em que o aluno resolve um problema e chega ao resultado correto cometendo erros durante o processo. O resultado final não mostra a solução do problema, pois ele não é o fator principal, mas faz parte de um conjunto de idéias que levam à resolução do problema. Em diversas situações, os alunos questionam que, estando o resultado (um número) correto, toda a questão deveria estar certa, não sendo necessário levar em conta o processo de resolução do mesmo, bastando o resultado final. Mas, a linguagem matemática, expressa por meio de seus símbolos, mostra o pensamento do aluno que o levou até a solução do problema.

A princípio, a idéia era aplicar o questionário, analisar os dados coletados e retornar aos alunos na tentativa de reconstruir os conceitos matemáticos ainda não formalizados ou mal elaborados. Percebi que isso seria inviável, pois, a quantidade de alunos deveria ser menor e seria necessário mais tempo com esse grupo para que, de fato, ocorresse a reconstrução dos conceitos. De acordo com D'Amore (2005), tentar diferenciar conceito e a sua construção não é fácil, pois um conceito está permanentemente em fase de construção.

O ensino da Matemática é preocupação, em geral, dos profissionais dessa área nos diversos segmentos da escola, sendo esta considerada uma das disciplinas de maior dificuldade, responsável por reprovações, supervalorizada na escola e no cotidiano. Os alunos, em geral, gostam de Matemática principalmente quando têm bom desempenho nessa área. Este fator deveria ser mais bem aproveitado na prática docente.

Pessoas que sabem Matemática não são diferentes das outras. Isto é uma questão cultural, e as pessoas se acostumam com essas crenças e as tomam como verdades absolutas. Desde pequenas, as crianças escutam coisas do tipo "recuperação em ..., como é possível?", já "recuperação em matemática" é totalmente possível e previsível. Em geral, procura-se um professor particular que possa, num reduzido espaço de tempo, “treinar” todos os modelos de exercícios necessários para a aprovação, o que, na maioria das vezes, resolve o problema. D’ Ambrosio (2005, p.77) afirma que: ”é essencial distinguir educação de treinamento”.

Algumas questões precisam ser pensadas e discutidas com o objetivo de melhorar o ensino e a aprendizagem da Matemática, por exemplo: É esse o ensino que se quer? Qual o pensamento matemático que se quer desenvolver? De que maneira o professor vê o conhecimento?

Este trabalho discute questões que podem auxiliar na mudança desse quadro a respeito do ensino da Matemática, ou pelo menos tentar trazer à tona a discussão dessas e de outras questões para a melhoria do ensino da Matemática. Isso talvez auxiliar trabalhos futuros nesta área.

A partir do estudo realizado neste trabalho, foi possível constatar algumas deficiências no ensino e aprendizagem da Matemática. Em geral, os conteúdos são trabalhados de forma estanque e repletos de regras sem significado para o aluno. Deixam a desejar o desenvolvimento da linguagem e do pensamento matemático.

É preciso estar atento não exclusivamente aos conteúdos, mas, sobretudo, a todos os elementos necessários para a elaboração dos mesmos, assim como para a linguagem clara e objetiva, o pensamento construído sobre conceitos já estruturados e a disposição do aprendiz com o novo conhecimento. Além desses fatores, relacionados diretamente com o conteúdo, existem os que estão ligados aos alunos, assim como o emocional e afetivo, o conhecimento que aluno já traz consigo e as suas concepções sobre aprendizagem da Matemática.

D’ Amore (2005) ressalta que: “o conhecimento viria a ser o resultado de um ‘contato’ entre o sujeito que aprende e um objeto de conhecimento” (p.52). Nesse contato, o aluno carrega suas concepções e também a forma como a Matemática é passada para ele durante sua vida escolar. Se ele foi treinado para resolver problemas, é assim que ele vai reagir.

A amostra utilizada nesta pesquisa foi escolhida com o objetivo de ter diversas realidades para fazer um comparativo. Foram escolhidas escolas públicas e privadas, nas quais varia a idade dos alunos, pois aquelas apresentam também o turno da noite. As escolas da rede particular apresentam pais com maior nível de escolaridade. Imagina-se que conhecer a escolaridade dos pais seja relevante por pensar que este fator seria influente no gosto dos alunos pelos estudos, mas os dados mostraram o contrário: os alunos cujos pais têm um nível de escolaridade menor afirmam gostar mais de estudar que os outros.

Os escores dados pelos alunos em afirmações referentes a sua relação com a Matemática foram, em geral, homogêneos. Os alunos percebem a Matemática no dia-a-dia, na escola e em outras disciplinas. Quanto à questão sobre a disciplina ser agradável, as respostas variaram entre sim e não, não importando nos resultados ser a escola pública ou privada. A partir de tais dados, motiva-se o questionamento sobre qual fator ou quais fatores tornaria a Matemática uma disciplina agradável. Quanto a ser difícil, em geral, os alunos de todas as escolas consideram a Matemática uma disciplina difícil, mesmo os que têm bom resultado nessa área.

Os alunos ainda responderam questões mais específicas referentes a conteúdos da Matemática. Os alunos oriundos das escolas particulares apresentaram um desempenho superior em relação aos alunos das escolas públicas nas questões mais específicas dos conteúdos de Matemática, assim como, na resolução de operações básicas, resolução de equações e leitura e interpretação de gráficos. Nas questões relativas ao teorema de Pitágoras e à representação do número *0,2*, tanto as escolas públicas quanto as privadas tiveram um baixo desempenho. Em geral, as escolas com melhores condições de trabalho, tiveram um resultado melhor. Porém, em relação ao tipo de erro cometido a variação é pequena, já que o erro cometido é, em geral, o mesmo.

Propor algo novo não é tarefa fácil. A discussão de idéias, as tentativas de mudança para melhorar o ensino e a aprendizagem da Matemática são necessárias e levam à reflexão do fazer pedagógico, e esse é o que está entre a teoria e a prática do professor. Importa analisar não só o conteúdo da disciplina, mas outros fatores que fazem parte na sua construção.

A Matemática é diferente de outras ciências e tem caráter universal, já que vários de seus conceitos nunca se modificaram, ou seja, novos conceitos são desenvolvidos sobre aqueles já existentes. De acordo com D'Ambrosio (2005), "Para as demais disciplinas há uma reciclagem do conhecimento que resulta da própria dinâmica do conhecimento disciplinar". Na Matemática, ao propor algo novo, não se deve eliminar o conhecimento existente, e sim utilizá-lo para uma nova aprendizagem. Isso pode ser aproveitado para estruturar novos conceitos e fazer com que o aluno perceba como esses conceitos se formaram e evoluíram ao longo da história.

D'Amore (2005) reforça essas idéias, declarando que: "O conhecimento, portanto, não é apenas uma representação banal da realidade externa; ele é o resultado da interação entre o sujeito-aprendiz (as suas estruturas cognitivas) e as suas 'experiências sensoriais'." (p.53)

Mudança é algo gradual. Os professores, em geral, têm consciência dos fatores que impedem o desenvolvimento da Matemática nos alunos. Os alunos têm consciência do valor da Matemática tanto na escola como fora dela. É preciso, portanto, buscar formas diversificadas que permitam desenvolver essa área do conhecimento de maneira significativa. É preciso aprofundar a discussão, procurar novas formas de ensinar e aprender, utilizar novas e diferentes metodologias. Aprender com prazer e por prazer.

Aqui declara-se a pretensão de abrir um caminho, tentando mostrar a importância da língua materna na aprendizagem da Matemática, o significado das palavras dentro de um contexto, tais palavras fazendo sentido neste contexto. A linguagem matemática está repleta de símbolos que, dependendo de como estão dispostos, terão um significado. Importa, portanto, perceber que a linguagem matemática está aí para expressar idéias matemáticas e que não é suficiente um “resultado” correto para que um problema esteja certo. A Matemática não é feita de um problema e um número no final; ela se desenvolve dentro de uma estrutura que quer expressar um pensamento.

A maneira como os conteúdos são estruturados na escola tem uma lógica, pois, para aprender um conceito novo, geralmente, é feita uma conexão com um conceito já conhecido. Porém eles não precisam ser estanques, não se deve esgotar um conceito em uma série, mas fazer sua construção de forma gradual, inserindo este conceito em outras situações nas séries seguintes. Por exemplo, por que estudar tudo sobre frações na 5ª série? Não é possível que os professores continuem sabendo exatamente em que ponto do exercício o aluno vai errar e isso continue passando de geração para geração. É preciso ir à raiz do problema. O que leva os alunos a cometerem esses erros? O que não ficou bem estruturado? Como é possível reconstruir esses conceitos mal elaborados?

A partir deste trabalho, propõe-se como sugestão para trabalhos futuros pesquisar a respeito da reconstrução de conceitos, a partir do questionamento resultante da pesquisa realizada. Como fazer com que um aluno que aplica um conceito de forma mecânica e generalize regras, consiga tornar esse conceito significativo a ponto de fazer parte de sua estrutura cognitiva e com possibilidade de servir para novas aprendizagens?

11 REFERÊNCIAS

ALVES-MAZZOTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais:** pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira Thomson, 2002.

ANTEZANA, G.M. Una aproximación a la didáctica en el proceso del aprendizaje de las matemáticas. **Monografías.com**, Santa Cruz. Disponível em <http://monografias.com/una aproximación> Acesso em 07 fev. 2005.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro: Interamericana, 1978.

BALDINO, R. R. Pesquisa – ação para formação de professores: leitura sintomal de relatórios. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. (221 – 245).

BICUDO, M. A. V. Filosofia da educação matemática: um enfoque fenomenológico. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. (21 – 43).

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. **Filosofia da educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (orgs.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. p. (99 – 112).

BORGES, R.M.R. **Em debate:** cientificidade e educação em ciências. Porto Alegre: SE/CECIRS, 1996.

BRAVO, J. A. F.; HUETE, J. C. S. **O ensino da matemática:** fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 2005.

BRITO, M. R. F. Aprendizagem significativa e a formação de conceitos na escola. In: BRITO, M. R. F. (org.). **Psicologia da educação matemática**. Florianópolis: Insular, 2001. p. (69 – 84).

CARRAHER, T.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A.L. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1989.

CHACÓN, I. M. G. **Matemática emocional**. Porto Alegre: Artmed, 2003.

CURY, H N. Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em educação matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 3, n. 4, p.39-50, nov. 1995.

CURY, H.N. "Professora, eu só errei um sinal!": como a análise de erros pode esclarecer problemas de aprendizagem. In: CURY, H. N. (org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: Edipucrs, 2004. p. (111 – 138).

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação:** reflexões sobre educação e matemática. São Paulo: Summus, 1986.

D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. São Paulo: Ática, 2001.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática:** da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2005.

D'AMORE, B. **Epistemologia e didática da matemática**. São Paulo: Escrituras, 2005.

DANTE, L. R. **Matemática – contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2002.

DEVLIN, K. **O gene da matemática**. Rio de Janeiro: Record, 2004.

DIENES, Z. P. **O poder da matemática**. São Paulo: E.P.U, 1975.

DIENES, Z. P. **As seis etapas do processo de aprendizagem em matemática**. São Paulo: EPU, 1986.

ENGLER, A.; GREGORINI, M. I.; MÜLLER, D.; VRANCKEN, S.; HECKLEIN, M. Los errores en el aprendizaje de matemática. **Revista premisas**, Santa Fé, n 23, p.23-29, nov. 2004.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da UNICAMP, 2002.

FALCÃO, J.T. da R. **Psicologia da educação matemática – uma introdução**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

FERNÁNDEZ, A. **O saber em jogo**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

FONSECA, M. da C. F. R. **Letramento no Brasil – habilidades matemáticas**. São Paulo: Global, 2004.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FURTH, H. G.; WACHS, H. **Piaget na prática escolar**. São Paulo: IBRASA, 1979.

GITIRANA, V. Planejamento e avaliação em matemática. In: SILVA, F.S.; HOFFMANN, J.; ESTEBAN, M. T. (orgs.). **Práticas avaliativas e aprendizagens significativas em diferentes áreas do currículo**. Porto Alegre: Mediação, 2003. p. (57 – 66).

GOLBERT, C. **Novos rumos na aprendizagem da matemática**. Porto Alegre: Mediação, 2002.

GOLDENBERG, E. P. Hábitos de pensamento: um princípio organizador para o currículo. **Educação e matemática**, Portugal. Disponível em: <http://www.apm.pt/apm/revista/educ48/educ48_6.htm>. Acesso em 12 jun. 2004.

GOULART, I. B. **Piaget:** experiências básicas para utilização pelo professor. Petrópolis: Vozes, 1983.

GROSSI, E. P. A didática das provocações. In: GROSSI, E. P. (org.). **Por que ainda há quem não aprende?** A teoria. Petrópolis: Vozes, 2003. p. (107 – 118).

HERNÁNDEZ, A.; ALVARADO, G. Transformación de las prácticas pedagógicas a través de nuevos dispositivos de comunicación y la escritura de textos argumentativos. **Revista iberoamericana de educación**. Colombia. Disponible en: <http://www.campusoei.org/revista/deloslectores/hernanez.pdf>. Acesso em 15 abr. 2004.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Microdicionário de matemática**. São Paulo: Scipione, 1998.

KARLSON, P. **A magia dos números**. Porto Alegre: Globo, 1961.

KLINE, M. **O fracasso da matemática moderna**. São Paulo: Ibrasa, 1976.

KUHN, T.S. **A estrutura das revoluções científicas**. São Paulo: Perspectiva, 2000.

LIMA, V. S.; BRITO, M. R. F. Mapeamento cognitivo e a formação do conceito de frações. In: BRITO, M. R. F. (org.). **Psicologia da educação matemática**. Florianópolis: Insular, 2001. p. (107 – 127).

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

LURIA, A. R. **Pensamento e linguagem**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

MACHADO, N. S. **Matemática e língua materna**. São Paulo: Cortez, 1998.

MACHADO, S.D.A. **Aprendizagem em matemática**. Campinas: Papirus, 2003.

MENEZES, L. Matemática, linguagem e comunicação. **Millenium**. Disponível em: <http://www.ipv.pt/millenium/20 ect3.htm>. Acesso 26 jul. 2004.

MOREIRA, M. A. **A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área**. Disponível em: <http:/www.if.ufrgs.br/public/ensino/vol7/n1/v7 n1 a1.htm>. Acesso 19 set. 2004.

MOREIRA, M.; MASINI, E. **Aprendizagem significativa**, a teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro, 2001.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática**. Campinas: Papirus, 2000.

NUNES, C.; ALVES, D.; ALVES, S. Insucesso na matemática – por quê? **Educação e matemática**, n.61, p. 34-35, jan/fev. 2001.

ONUCHIC, L.; ALLEVATO, N. S. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (orgs.). **Educação matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. (213 – 231).

PAIN, S. A importância da teoria na arte de ensinar. In: GROSSI, E. P. **Por que ainda há quem não aprende?** A teoria. Petrópolis: Vozes, 2003. p. (65 – 106).

PAIS, C.L. **Didática da matemática:** uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PIAGET, J. **A linguagem e o pensamento da criança**. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

RATHS, L. E. **Ensinar a pensar**. São Paulo: EPU, 1977.

SANTOMÉ J. T. **Globalização e interdisciplinaridade**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

THOMAZ, T. C. F. **Não gostar de matemática:** que fenômeno é este? 1996. 140 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, PUCRS, Porto Alegre, 1996.

VYGOTSKY, L.S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

Apêndice 1

Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul

Mestrado de Educação em Ciência e Matemática

As questões abaixo fazem parte da estrutura de uma pesquisa de mestrado.
Os dados pessoais serão mantidos sob sigilo.
Agradeço a sua colaboração em respondê-las.

Mercedes Matte da Silva

CATEGORIA 1

Preencha os dados abaixo:
Idade: ______ Série: ________

Sexo: M ☐ F ☐

Nome da escola: ____

Qual é a sua matéria preferida? ______________________________

Qual a escolaridade do seu pai? ______________________________

Qual a escolaridade da sua mãe?______________________________

CATEGORIA 2

Marque um "X" no valor que expressa o seu grau de concordância com cada uma das afirmações abaixo. De 0 = discordo totalmente a 5 = concordo totalmente.

	0	1	2	3	4	5
Você gosta de estudar.						
A Matemática desperta o teu interesse.						
A Matemática deve ser estudada na escola.						
A Matemática é útil no dia a dia.						
A Matemática é uma disciplina agradável.						
A Matemática é difícil.						
A Matemática estudada em cada série é utilizada nas séries seguintes.						
A Matemática é utilizada em outras disciplinas.						
O pensamento matemático é diferente de outros tipos de pensamentos.						
Compreender a linguagem matemática auxilia no entendimento da própria Matemática.						
Conhecer os símbolos matemáticos é suficiente para se saber Matemática.						

CATEGORIA 3

BLOCO I

Nas questões de 1 a 5 marque a(s) alternativa(s) que você considera correta(s):

1- Você usa Matemática:*

a) para ir à lua
b) para pentear o cabelo
c) fazendo compras no supermercado
d) para visitar um amigo
e) nas aulas de história
f) no vestibular
g) para assistir televisão
h) para tocar um instrumento musical
i) para usar a internet
j) para cozinhar

2- Identifique os termos usados na Matemática:

a) algarismo
b) fotografia
c) chuva
d) triângulo
e) borracha
f) produto
g) mercadoria
h) diferença
i) racional
j) compras

3- Identifique os símbolos usados na Matemática:

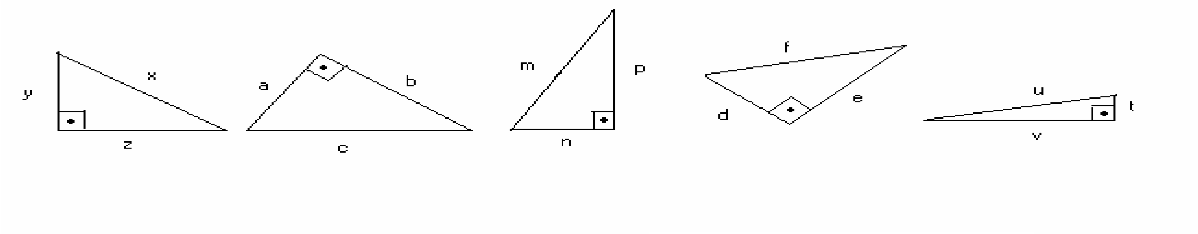
a) 4
b) ♫
c) &
d) $\notin$
e) π
f) @
g) $\propto$
h) ✜
i) $\neq$
j) ♥

4- O número 0,2 pode ser escrito como:

a) $\frac{1}{5}$
b) –2
c) 2%
d) $\frac{4}{2}$
e) $\frac{2}{10}$
f) 20%
g) $\frac{3}{2}$
h) $\frac{20}{100}$
i) $\sqrt{0{,}04}$
j) 0,02

* Esta questão foi desconsiderada por ser inconsistente, já que seria possível mais de cinco alternativas corretas.

5- Em quais casos está correto o uso do teorema de Pitágoras?



a) $x^2 = y^2 + z^2$

b) $a^2 = b^2 + c^2$

c) $p^2 = m^2 - n^2$

d) $f^2 = d^2 . e^2$

e) $t^2 = v^2 - u^2$

f) $c^2 = a^2 + b^2$

g) $d^2 = f^2 - e^2$

h) $m^2 = p^2 - n^2$

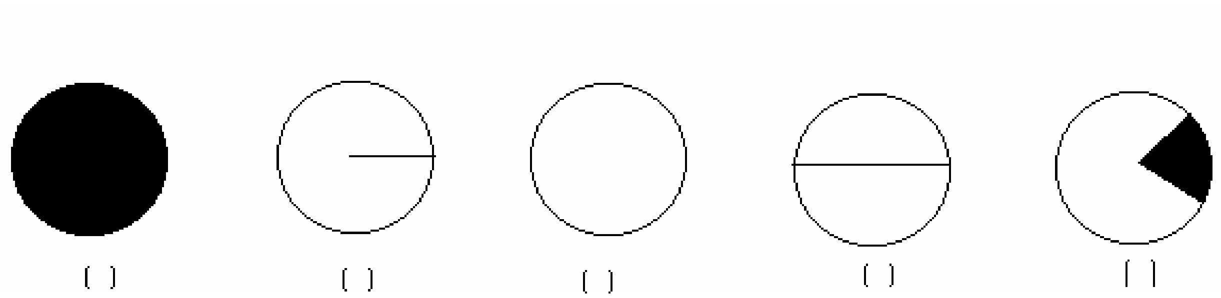
i) $u^2 = v^2 + t^2$

j) $y^2 = x^2 + z^2$

BLOCO II

Nas questões de 6 a 9 coloque entre os parênteses a letra que corresponde ao seu significado.

6- Associe a cada desenho o seu significado:



a) diâmetro

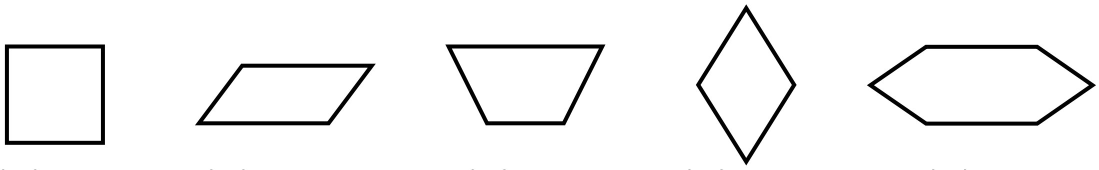
b) raio

c) setor circular

d) círculo

e) circunferência

7-Associe a cada figura geométrica o seu nome.



( )   ( )   ( )   ( )   ( )

a) losango

b) quadrado

c) trapézio

d) hexágono

e) paralelogramo

8- Associe a cada expressão o seu significado:

a/b	**a + b**	**a – b**	**a. b**	$\mathbf{a^b}$
( )	( )	( )	( )	( )

a) a soma de a e b

b) a razão entre a e b

c) o produto de a por b

d) a diferença entre a e b

e) a elevado a b

9- Associe a cada medida a sua unidade correspondente.

( ) Km   ( ) $\mathbf{m^2}$ ( ) g   ( ) s   ( ) $\mathbf{cm^3}$

a) área

b) capacidade

c) tempo

d) comprimento

e) massa

BLOCO III

Nas questões 10 e 11 resolva o que é solicitado:

10- Resolva as expressões:

a) 12 – 3. 5 =

b) $4 - (6 - 2) + 3.(2 - 7)^2 =$

c) $\frac{2}{5} + \left(\frac{4}{7}\right)^{-1} =$

d) $\dfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{6}}{\frac{1}{2}} =$

e) $3\sqrt{12}+2\sqrt{3}=$

11- Resolva as equações:

a) 2x – 6 = - 12

b) –2x + 1 = x – 4

c) 5 – 2.(x – 3) = 4

d) $\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{5x+2}{4}=0$

e) x² - 5x + 6 = 0

BLOCO IV

Nas questões 12 e 13 marque uma alternativa correta:

12- A expressão algébrica que traduz “x% de y é z” é

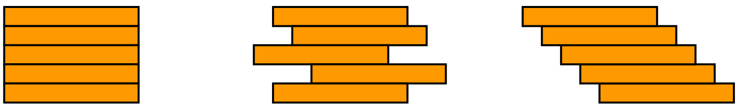
a) $\dfrac{xyz}{100}=1$

b) $\dfrac{x}{100y}=z$

c) x. 100y = z

d) $\dfrac{x}{100}y=z$

e) $\dfrac{xyz}{100}=0$



pilha A pilha B pilha C

13- (UFSM-RS) Três crianças estavam brincando na biblioteca da escola e resolveram fazer pilhas de mesma altura, com livros, conforme a figura. A mais organizada fez a pilha A, e as outras duas fizeram as pilhas B e C. Considerando-se que todos os livros têm a mesma área de capa e que as pilhas têm a mesma altura, pode-se afirmar que:

a) O volume da pilha A é maior do que o volume da pilha C.

b) Os volumes das pilhas B e C são iguais e maiores do que o volume da pilha A.

c) O volume da pilha A é menor do que o volume da pilha B que é menor do que o volume da pilha C.

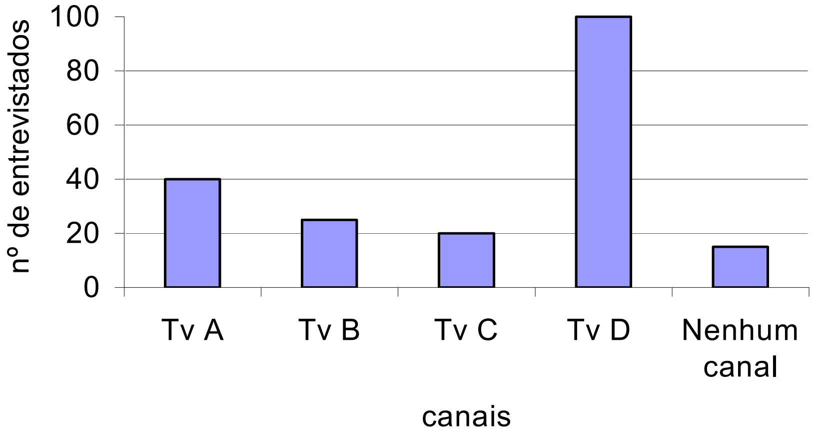
d) Os volumes das três pilhas são iguais.

e) Não existem dados suficientes no problema para decidir sobre os volumes e compará-los.

BLOCO V

De acordo com o gráfico responda as questões 14 e 15.

(ENEM-1998) Uma pesquisa de opinião foi realizada para avaliar os níveis de audiência de alguns canais de televisão, entre 20h e 21h, durante uma determinada noite. Os resultados obtidos estão representados no gráfico de colunas abaixo:



14- A percentagem de entrevistados que declararam estar assistindo à Tv B é aproximadamente igual a:

a) 13%

b) 20%

c) 22%

d) 27%

e) 30%

15- O número de residências atingidas nessa pesquisa foi aproximadamente de:

a) 100
b) 135
c) 150
d) 200
e) 220

BLOCO VI

Na questão 16 preencha os espaços conforme solicitado.

16- Escreva as frases na linguagem Matemática:
a) um número ____
b) o dobro de um número menos sete _________________________________
c) o triplo de um número mais o seu quadrado ___________________________
d) a diferença entre um número e seu cubo ____________________________
e) cinco terços de um número mais o dobro deste número __________________

BLOCO VII

Nas questões de 17 a 20 resolva os problemas:

17- Um menino possui 3 carrinhos com 4 rodas em cada um. Qual a idade do menino?____
____

18- Eu e você temos juntos 6 reais. Quanto dinheiro eu tenho? ________________
____

19- Numa sala tem 5 pessoas e todas elas se cumprimentam com um aperto de mão. Quantos apertos de mão serão dados? ______________________________
____

20- A tabela abaixo apresenta o preço de um xampu com diferentes quantidades. Qual xampu é mais vantajoso de ser comprado?

XAMPU	PREÇO (em reais)
200 ml	3,10
300 ml	4,20
500 ml	5,30